WYKŁAD XIII
METODY NUMERYCZNE W MODELOWANIU PROCESÓW

Część II

13.3 METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH.

13.3.1 Wstęp.

Metoda elementów skończonych (MES) została zapoczątkowana przez Turnera w 1956 r., jakkolwiek wymienia się również nazwisko Couranta, którego matematyczna praca z 1942 r. stanowi podwaliny tej metody. Rozwój MES nastąpił w późnych latach sześćdziesiątych i siedemdziesiątych wraz z rozwojem techniki komputerowej, która umożliwiła rozwiązywanie bardziej złożonych zagadnień mechaniki, m.in. problemów nieliniowych. Lata osiemdziesiąte to dalszy rozwój metody w różnych dziedzinach mechaniki klasycznej, mechaniki płynów i termodynamiki, nieliniowych zagadnień geometrycznych i materiałowych, drgań itp. W Polsce popularność tej metody została zapoczątkowana podręcznikiem O.C. Zienkiewicza: *Metoda Elementów Skończonych*, przetłumaczonym przez prof. Igora Kisiela z Politechniki Wrocławskiej, podręcznika wydanego w 1972 r. Obecnie dzięki powszechności komputerów osobistych i ich stale rosnących mocy obliczeniowych metoda elementów skończonych jest powszechnie dostępna i wykorzystywana w nauce przez pracowników i studentów oraz przez liczne biura projektowe.

13.3.2 Podstawy MES.

Metoda elementów skończonych polega na dyskretyzacji kontinuum skończoną liczbą podobszarów (elementów) zwykle o prostej geometrii, które są ze sobą połączone w punktach nazywanych węzłami, najczęściej występującymi w narożach elementów. W węzłach elementów poszukiwane jest przybliżone rozwiązanie równania różniczkowego lub układu równań. Jest to więc zasadnicza różnica w stosunku do rozwiązania metodą różnic skończonych, w której dyskretyzacji podlegają równania różniczkowe, podczas gdy w MES dyskretyzuje się obszar rozwiązania. Metoda elementów skończonych dla wielu zagadnień wykazuje przewagę nad klasyczną metodą różnic skończonych, szczególnie w przypadku niejednorodności ośrodka i złożonych geometrycznie warunków brzegowych, które są w MES spełnione w sposób naturalny. Ponadto zaletą MES jest łatwość budowania algorytmów obliczeniowych i ich uniezależnienie od warunków brzegowych i początkowych.

Algorytm obliczeń MES można przedstawić w postaci w postaci następujących etapów:

1. dokonanie podziału obszaru rozwiązania na podobszary w postaci prostych geometrycznie elementów, zwykle trójkątów lub prostokątów (czworokątów) dla zagadnienia 2D, albo czworościanów, graniastosłupów lub prostopadłościanów w problemach trójwymiarowych;
2. wybór punktów węzłowych dla wybranego typu elementu, w których określane będą niewiadome wartości wielkości fizycznych. Iloczyn liczby punktów węzłowych i liczby niewiadomych w węźle stanowi wymiar układu równań algebraicznych;
3. wybór funkcji rozkładu niewiadomych wielkości fizycznych w elemencie w zależności od wartości węzłowych;
4. przekształcenie równań różniczkowych do układu równań algebraicznych poprzez zastosowanie funkcji wagowych;
5. ułożenie układu równań algebraicznych dla całego obszaru na podstawie informacji o topologii elementów i węzłów;
6. uwzględnienie w macierzy warunków brzegowych i początkowych poprzez modyfikację współczynników lub eliminację części równań;

7. rozwiązanie układu równań i znalezienie wartości poszukiwanych wielkości fizycznych w węzłach obszaru;
8. dla zagadnień nieliniowych lub niestacjonarnych powtarzanie etapów 6 i 7 aż do uzyskania żądanej dokładności lub osiągnięcia wymaganej liczby kroków czasowych.

Istnieje kilka sformułowań MES. Najczęściej stosuje się podejście wariacyjne, polegające na minimalizacji funkcjonału lub sformułowanie Galerkina oparte na metodzie ważonych reziduów (reszt). Należy podkreślić, że obie metody prowadzą do jednakowego rozwiązania, tj. zbudowania takiego samego układu równań algebraicznych.

13.3.3 Metoda ważonych reziduów

Metoda ważonych reziduów jest narzędziem rozwiązywania równań różniczkowych i posiada kilka odmian. Jeśli dowolne równanie różniczkowe ważne jest w obszarze ciągłym i ograniczonym Ω, zapiszemy symbolicznie w postaci:

$$L(u) = 0 \quad \text{w} \quad \Omega \tag{13.1}$$

z warunkiem brzegowym

$$B(u) = 0 \quad \text{na} \quad \Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2, \tag{13.2}$$

to wstawiając w rów.(13.2) w miejsce funkcji $u(x, y, z)$ jej przybliżenie, otrzymujemy resztę R różną od zera, bowiem funkcja aproksymująca $\hat{u}$ nie spełni dokładnie równania różniczkowego:

$$L(\hat{u}) = R \neq 0. \tag{13.3}$$

Załóżmy, że funkcja $\hat{u}$ spełnia warunki brzegowe (13.2). Błąd aproksymacji R może być minimalizowany (w średnim sensie) przez ortogonalizację wyrażenia (13.3) ,tj.:

$$\langle R, w \rangle = \int_{\Omega} w\, R\, d\,\Omega \;=\; 0, \tag{13.4}$$

gdzie w jest funkcją wagową zależną tylko od współrzędnych.

Jeżeli liczba wartości poszukiwanej funkcji w węzłach jest n to należy wybrać n-liczbowo niezależnych funkcji wagowych w_i $(i=1,..n)$, z których każda musi spełnić równanie (13.4). Uzyskuje się w ten sposób odpowiednią liczbę równań algebraicznych:

$$\int_{\Omega} w_i\, R\, d\,\Omega \;=\; 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, ..., k. \tag{13.5}$$

13.3.3.1 Metoda kolokacji .

Jeśli przyjmiemy, że warunek zerowania reziduum będzie spełniony w skończonej liczbie punktów w Ω, to wówczas możemy wyrazić funkcje wagowe jako dystrybucje Diraca - $\delta(x, x_i)$, gdzie ξ wyraża współrzędne punktów, w których spełniony będzie warunek (13.5).

Dystrybucja Diraca posiada tę własność, że dla każdej funkcji ciągłej w x_i :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x, x_i)dx = f(x_i). \tag{13.6}$$

Przyjmując postać aproksymującej funkcji jako:

$$\hat{u} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, \tag{13.7}$$

gdzie funkcje φ_k spełniają jednorodne warunki brzegowe, równanie (13.4) można zapisać następująco:

$$\int_{\Omega} \delta_i \, R \, d\,\Omega \; = \; 0 \,, \tag{13.8}$$

gdzie: δ_i reprezentują funkcję Diraca w punktach kolokacji $i = 1, 2, ...n$, R jest wyrażeniem reziduum z rów. (13.3).
W rezultacie całkowania (13.8) otrzyma się układ równań pozwalający na obliczenie współczynników α_k dla $k = 1, ..., n$, a następnie określenie postaci poszukiwanej funkcji u .

Odmianą tej metody jest **metoda kolokacji podobszarach**, w której zakłada się podział obszaru rozwiązania na szereg podobszarów oraz zakłada się, że średni błąd w podobszarze zanika.
Podobszary nie mają punktów wspólnych, ale razem pokrywają cały obszar rozwiązania.
W tym przypadku funkcje wagowe mogą być wyrażone przez funkcje Heaviside'a $H\left(x-\xi\right)$, które są zdefiniowane następująco:

$$H\left(x-\xi\right) = \begin{cases} 1, & x > \xi \\ 0, & x < \xi \end{cases}, \tag{13.9}$$

Przypadek kiedy $x = \xi$, nie jest rozpatrywany. Przy odpowiednim doborze funkcji aproksymującej otrzymany układ równań jest tożsamy z rozwiązaniem metodą różnic skończonych dla funkcji aproksymującej w postaci wielomianu drugiego stopnia.

13.3.3.2 Metoda momentów.

W metodzie momentów wybiera się jako funkcje wagowe zbiór funkcji liniowo niezależnych, t.j. spełniających warunek:

$$b_1 f_1 + b_2 f_2 + ... + b_n f_n = 0 \Leftrightarrow b_1 = b_2 = ... = b_n = 0 \,. \tag{13.10}$$

Dla zagadnienia jednowymiarowego takimi funkcjami są:

$$1, x, x^2, ... \,. \tag{13.11}$$

Poszukiwana funkcja u jest aproksymowana za pomocą równania (13.7).
Wstawiając powyższe wyrażenia do warunku zerowania reziduum (13.4) , otrzymuje się układ równań zależny od parametrów α_k , którego rozwiązanie pozwala na określenie postaci funkcji u .

13.3.3.3 Metoda najmniejszych kwadratów.

Metoda najmniejszych kwadratów jest znana z jako jedna z metod oszacowania błędu pomiaru. Polega na minimalizacji kwadratu błędu poprzez obliczenie pochodnej i przyrównanie jej do zera. Jeśli postać funkcji aproksymacyjnej wyraża się wzorem (13.7) to wówczas reziduum jest funkcją nieznanych współczynników α_k , a minimalizacja błędu będzie dana układem n równań algebraicznych dla $i = 1, ..., n$:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \int_{\Omega} \left(R\left(x, \alpha_i\right) \right)^2 d\Omega = 2 \int_{\Omega} R\left(x, \alpha_i\right) \frac{\partial R\left(x, \alpha_i\right)}{\partial \alpha_i} d\Omega = 0 \,. \tag{13.12}$$

Funkcje wagowe w tym przypadku będą dane wyrażeniem:

$$w_i = \frac{\partial R}{\partial \alpha_i} \,. \tag{13.13}$$

13.3.3.4 Metoda Galerkina.

Metoda zaproponowana przez Galerkina jest szczególnym przypadkiem metody ważonych reziduów, bowiem stosuje się w niej takie same funkcje aproksymujące i wagowe, tj.:

$$\hat{u} = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + ... + \alpha_n\varphi_n \,, \tag{13.14}$$

$$w = \beta_1\varphi_1 + \beta_2\varphi_2 + ... + \beta_n\varphi_n \,, \tag{13.15}$$

co z reguły prowadzi do najlepszego przybliżenia. Podstawiając powyższe wyrażenia do równania (13.5) otrzymamy układ równań, których rozwiązanie da poszukiwane wartości α_i.

Często funkcję wagową zapisuje się w postaci:

$$w = \delta u = \delta\alpha_1\varphi_1 + \delta\alpha_2\varphi_2 + ... + \delta\alpha_n\varphi_n \,, \tag{13.16}$$

gdzie $\delta\alpha_i \equiv \beta_i$, które to współczynniki są utożsamiane z wirtualnymi wielkościami fizycznymi, np. przemieszczeniami lub prędkościami.

Dzięki swojej własności równoważnych funkcji aproksymacyjnych i wagowych współczynniki w układzie równań są (na ogół) symetryczne, co ma duże praktyczne znaczenie przy rozwiązywaniu tego układu.

Metoda Galerkina jest najczęściej wykorzystywana przy formułowaniu układów równań w metodzie elementów skończonych. Aproksymacji funkcji $u(x, y, z)$ wewnątrz elementu skończonego dokonuje się przy pomocy liniowej kombinacji nieznanych wartości węzłowych i znanych funkcji bazowych (funkcji kształtu) :

$$\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{e} = \mathbf{N_e}\,\mathbf{u_e} \quad , \tag{13.17}$$

gdzie:

$\mathbf{N_e} = [\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2, ..., \mathrm{N}_\mathrm{n}]$ – macierz funkcji bazowych zależnych tylko od współrzędnych dla elementu e,

$\mathbf{u_e} = [u_1, u_2, ..., u_e]$ – wektor poszukiwanych wartości funkcji w węzłach elementu e.

Dla całego obszaru można zapisać:

$$\hat{\mathrm{u}} = \mathbf{N}\,\mathbf{u} \quad . \tag{13.18}$$

Przyjmując funkcje wagowe w_i, takie same jak funkcje bazowe N_i i podstawiając kolejno równanie(13.18) do równania(13.3), a następnie do (13.4), można stosowne równanie metody Galerkina zapisać następująco:

$$\int_\Omega w_i L(\hat{u})\,d\Omega = \int_\Omega \mathrm{N}_i\, L(\mathbf{Nu})\,d\Omega = 0 \,, i = 1, ...n \,. \tag{13.19}$$

Zakładając, że całka po całym obszarze Ω może być zastąpiona sumą całek po elementach, otrzymujemy:

$$\int_\Omega \mathrm{N_i}\, L(\mathbf{Nu})\,d\Omega = \sum_{e=1}^{m} \int_{\Omega_e} L(\mathbf{N_e u_e})\mathbf{N_e^T}\,d\Omega \,, \tag{13.20}$$

gdzie e - oznacza element skończony

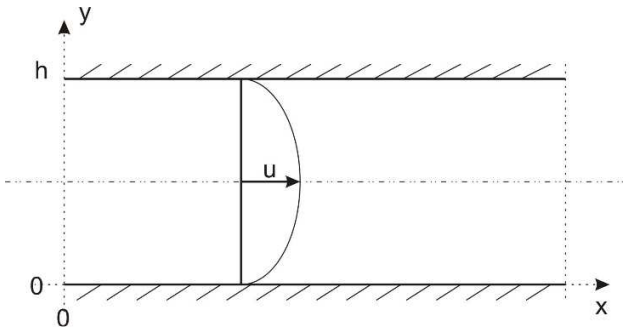
13.3.4 Przykłady rozwiązań jednowymiarowych.

Zasady stosowania metody Galerkina przedstawimy na przykładzie przepływu Poisseville'a. Jest to stacjonarny, płaski przepływ cieczy lepkiej nieściśliwej, poruszającej się pod wpływem siły ciężkości pomiędzy dwiema równoległymi płytkami z periodycznymi warunkami brzegowymi (Rys.13.15). Na podstawie uzyskanych w p-kcie VI.2 wyników możemy równanie ruchu zapisać w formie uproszczonej:

$$\mu \frac{d^2u}{dy^2} - 1 = 0 \,. \tag{13.21}$$

Warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} &u(0,y) = u(l,y) \quad - \quad \text{warunek periodyczności,} \\ &u(x,0) = u(x,h) = 0 \quad - \quad \text{warunek adhezji.} \end{aligned} \tag{13.22}$$



Rys.13.15. Schemat obliczeniowy dla przepływu płaskiego pomiędzy dwiema płytkami.

Przyjmijmy na podstawie rów. (13.17), że funkcja aproksymacyjna w obszarze jednoelementowym jest w postaci:

$$\hat{u} = N_1 u_1 \tag{13.23}$$

oraz

$$N_1 = \sin \frac{\pi y}{h} \,. \tag{13.24}$$

Funkcja ta została dobrana w taki sposób, by spełniać warunek adhezji na powierzchni płytek, tj. $N_1(0) = N_1(h) = 0$.

Stąd:

$$\hat{u} = \sin \frac{\pi y}{h} u_1 \,. \tag{13.25}$$

Obliczamy następnie funkcję residuum:

$$R = \mu \frac{d^2 \hat{u}}{dy^2} - 1 = -\mu \frac{\pi^2}{h^2} \sin \frac{\pi y}{h} u_1 - 1 \,. \tag{13.26}$$

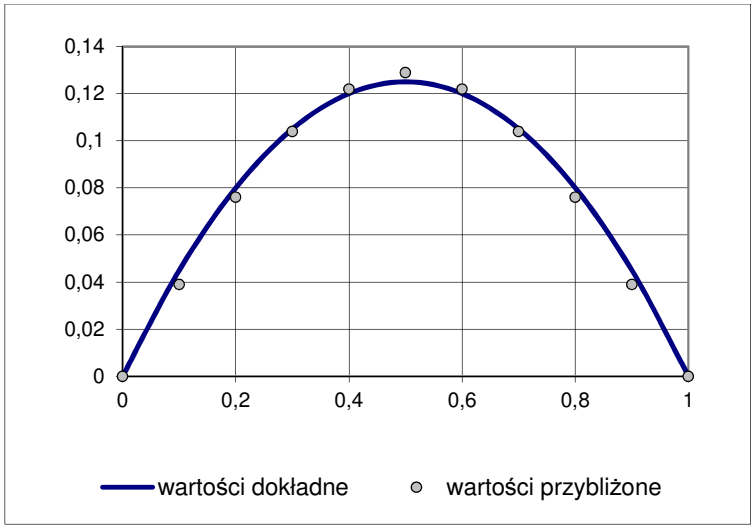
Po podstawieniu do równania (13.4) :

$$\begin{aligned} \int_\Omega wRd\Omega = \int_0^h N_1 R d\Omega = \int_0^h \left(-\mu \frac{\pi^2}{h^2} \sin^2 \frac{\pi y}{h} u_1 - \sin \frac{\pi y}{h} \right) dy = \\ = -\mu \frac{\pi^2 u_1}{h^2} \int_0^h \frac{1 - 2\cos \frac{2\pi y}{h}}{2} dy - \int_0^h \sin \frac{\pi y}{h} dy = \\ = -\mu \frac{\pi^2 u_1}{2h} - \frac{2h}{\pi} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 = -\frac{4h^2}{\mu \pi^3} \end{aligned} \tag{13.27}$$

Obliczoną wartość u_1 podstawiamy do równania (13.25):

$$\hat{u} = -\frac{4h^2}{\mu\pi^3}\sin\frac{\pi y}{h}. \qquad (13.28)$$

Błąd wyznaczenia wartości $\hat{u}$ w stosunku do rozwiązania dokładnego danego wzorem: $u = -\frac{1}{2\mu}y(h-y)$ przedstawiono na wykresie (Rys.13.16) i w tabeli 13.2.dla wartości dokładnych - $\frac{\mu u}{h^2}$ i przybliżonych - $\frac{\mu \hat{u}}{h^2}$

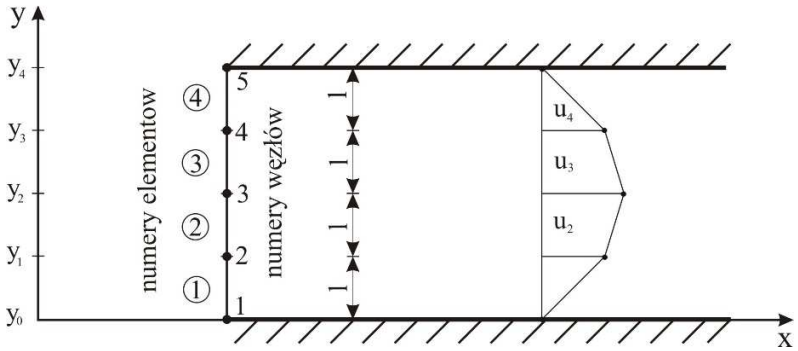


Rys.13.16. Błąd tachoidy prędkości dla rozwiązania dokładnego i przybliżonego MES.

Tabela 13.2. Procentowy błąd rozwiązania MES

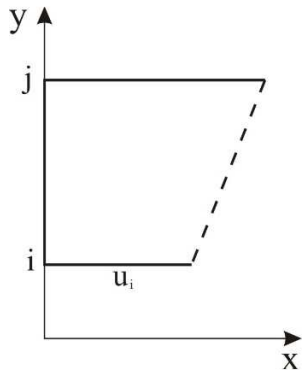
y/h	$\mu u/h^2$	$\mu \hat{u}/h^2$	$(u-\hat{u})/u$ [%]
0.1	0.045	0.039	13.3
0.2	0.080	0.076	5.0
0.3	0.105	0.104	1.0
0.4	0.120	0.122	1.6
0.5	0.125	0.129	3.0

Istotą metody elementów skończonych jest podział obszaru na elementy skończone i odpowiedni dobór funkcji bazowych. Funkcje te muszą aproksymować rozwiązanie lokalnie, tj. w obrębie elementu i muszą być ciągłe oraz zapewniać ciągłość rozwiązania na styku elementów.
Spróbujmy zagadnienie przepływu Poisseville'a rozwiązać ponownie dla czterech elementów skończonych o długości *l* każdy (Rys.13.17).



Rys.13.17. Podział obszaru przepływu Poisseville'a na elementy.

Każdy z elementów jest odcinkiem zbudowanym na dwóch węzłach. Dla takiego typu elementu zakłada się, że funkcja u będzie liniowa, jak przedstawiono na rysunkach 13.18 i 13.113.



Rys.13.18. Jednowymiarowy element liniowy.

Postać funkcji bazowej jest następująca:

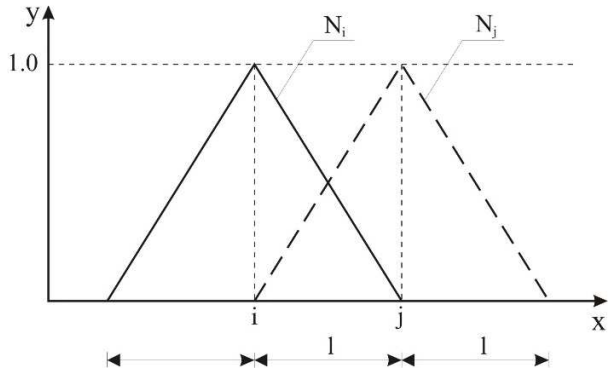
$$\hat{u} = ay + b\,,$$
$$u_i = ay_i + b\,,$$
$$u_j = ay_j + b\,,$$

stąd

$$\hat{u} = \frac{u_j - u_i}{y_j - y_i}\,y - \frac{u_j - u_i}{y_j - y_i}\,y_i + u_i = \frac{y_j - y}{y_j - y_i}\,u_i + \frac{y - y_i}{y_j - y_i}\,u_j = \mathrm{N_i}u_i + \mathrm{N_j}u_j = \mathbf{Nu}\,. \qquad (13.29)$$

Funkcje $\mathrm{N_i}$ i N_j nazywane są, ze względu na swój kształt, funkcjami daszkowymi i mają następujące własności (Rys.13.19):

$$\begin{cases} \mathrm{N_i}=1, \quad \mathrm{N_i}=0 \quad \text{dla węzła} \quad i, \\ \mathrm{N_j}=0, \quad \mathrm{N_j}=1 \quad \text{dla węzła} \quad j. \end{cases} \qquad (13.30)$$



Rys.13113. Funkcje daszkowe.

Zauważmy jeszcze, że:

$$\frac{d\,\mathrm{N}_i}{dy} = -\frac{1}{l}, \quad \frac{d\,\mathrm{N}_j}{dy} = \frac{1}{l} \int_{y_i}^{y_j} \mathrm{N}_i dy = \frac{1}{2} l\,. \tag{13.31}$$

Obniżamy rząd pochodnej w równaniu reziduum poprzez całkowanie pierwszego członu przez części:

$$\mu \int_0^h \frac{d^2u}{dy^2} w\, dy - \int_0^h w d\,y = \frac{du}{dy} w \Big|_0^h - \int_0^h \frac{du}{dy}\frac{dw}{dy} dy - \int_0^h w d\,y\ . \tag{13.32}$$

Z warunku brzegowego na u wynika, że pierwszy człon po prawej stronie rów. (13.32) jest równy zeru.

Dla elementu 1 na podstawie równań (13.29) i (13.32) oraz z warunku liniowej niezależności funkcji bazowych obliczamy:

dla węzła 1:

$$-\mu \int_{y_1}^{y_2} \frac{d\hat{u}}{dy}\frac{dN_1}{dy} - \int_{y_1}^{y_2} N_1\, du = 0\,, \tag{13.33}$$

stąd:

$$\mu\left(\frac{u_1}{l} - \frac{u_2}{l}\right) = \frac{1}{2} l\,; \tag{13.34}$$

dla węzła 2:

$$-\mu \int_{y_1}^{y_2} \frac{d\hat{u}}{dy}\frac{dN_2}{dy} dy - \int_{y_1}^{y_2} N_2 dy = 0\,, \tag{13.35}$$

stąd:

$$\mu(-\frac{u_1}{l} + \frac{u_2}{l}) = \frac{1}{2} l\,. \tag{13.36}$$

Równanie macierzowe elementu 1 ma więc postać:

$$\frac{\mu}{l^2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \tag{13.37}$$

Powtarzając procedurę obliczeniową dla pozostałych trzech elementów możemy utworzyć globalnie równanie macierzowe jako sumę po wszystkich macierzach elementów oznaczonych linią przerywaną:

$$\frac{\mu}{l^2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1+1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \tag{13.38}$$

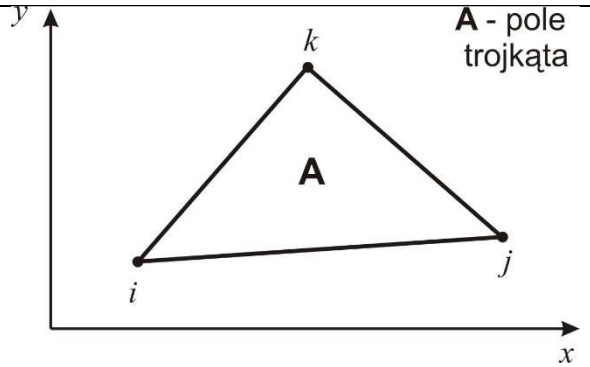
Po uwzględninieniu warunku zerowania prędkości na brzegu (13.22) macierz ta redukuje się do postaci zaznaczonej linią ciągłą. Rozwiązanie (13.38) daje następujące wartości, które odpowiadają rozwiązaniu ścisłemu:

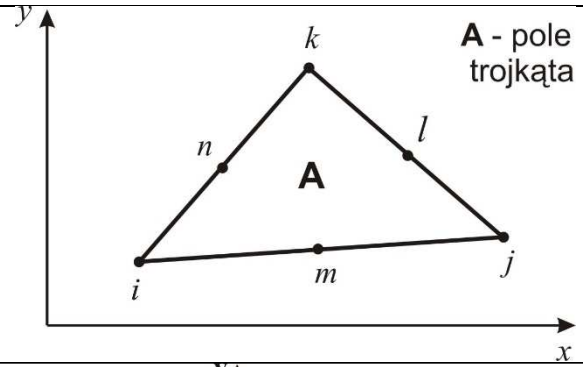
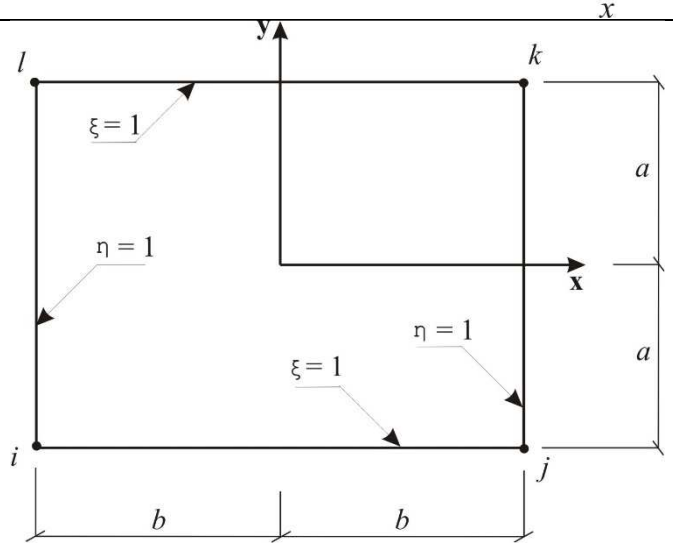
$$u_2 = u_3 = \frac{3}{32}\frac{h^2}{\mu}, \quad u_4 = \frac{1}{8}\frac{h^2}{\mu}.$$

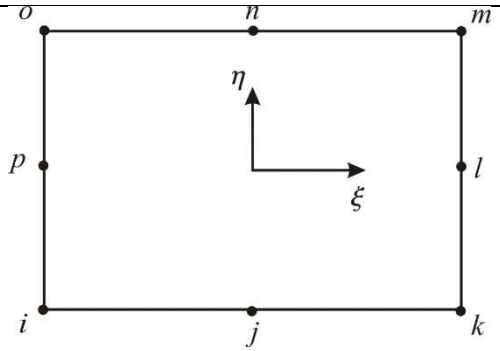
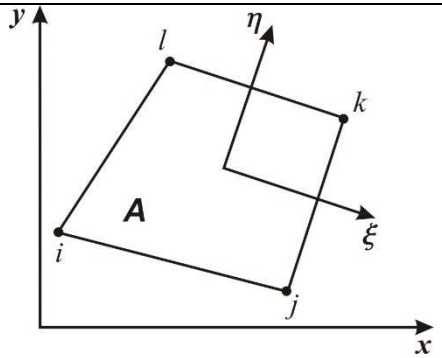
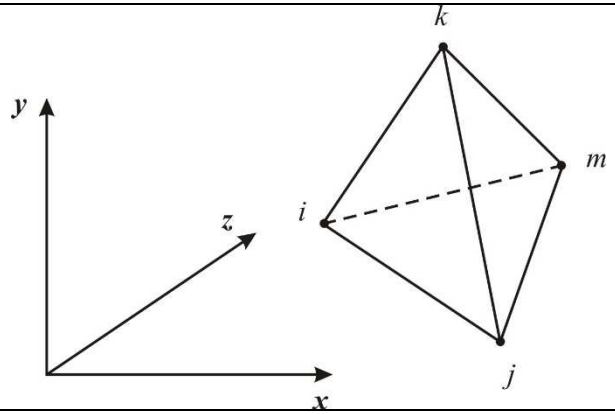
13.3.5 Rodzaje elementów i ich funkcje bazowe.

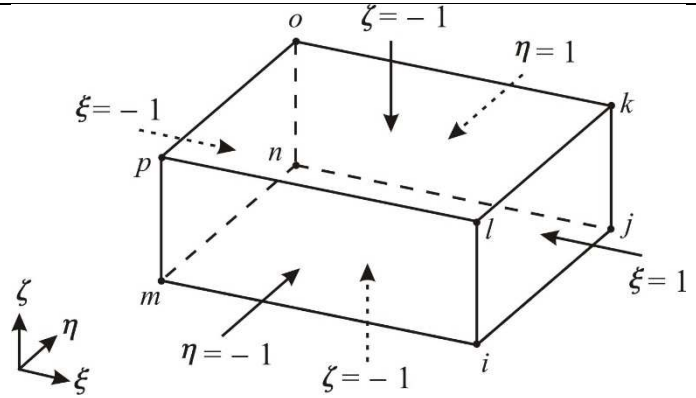
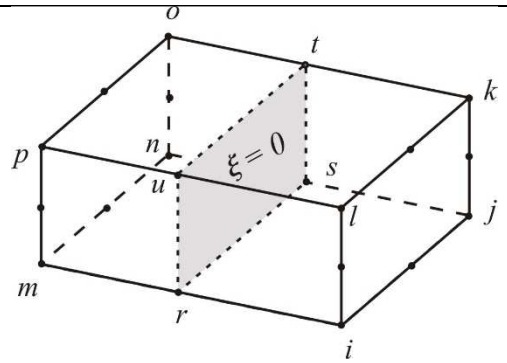
W zależności od wyboru kształtu elementu, liczby węzłów w elemencie i ich rozmieszczenia oraz wyboru funkcji bazowych otrzymuje się różne rodzaje elementów skończonych dla rozwiązania zagadnień jedno-, dwu- i trójwymiarowych, opisanych równaniami różniczkowymi rzędu drugiego. Przykłady różnych elementów i ich funkcji bazowych przedstawiono w tabeli 13.3. Obszerne omówienie sposobu wyprowadzenia funkcji bazowych dla elementów przedstawionych w tabeli 3 oraz inne rodzaje elementów, w tym elementy krzywoliniowe, można znaleźć w monografiach [Odena, 1972], [Zienkiewicza, 1978], [Owena, 1980].

Tabela 13.3. Rodzaje elementów skończonych

Typ elementu	Geometria elementu	Funkcje bazowe
1. Jednowymiarowy		$N_i = 1 - \xi$ $N_j = \xi$
2. Jednowymiarowy drugiego rzędu		$N_i = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)$ $N_j = 1 - \xi^2$ $N_i = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)$
3. Trójkątny		$N_i = L_i$ $N_j = L_j$ $N_k = L_k$ $L_i = \frac{(x_j y_k - x_k y_j) + (y_j - y_k)x + (x_k - x_j)y}{2A}$ $L_j = \frac{(x_k y_i - x_i y_k) + (y_k - y_i)x + (x_i - x_k)y}{2A}$ $L_k = \frac{(x_i y_j - x_j y_i) + (y_i - y_j)x + (x_j - x_i)y}{2A}$ A – pole trójkąta

4. Trójkątny drugiego rzędu		węzły narożne: $N_i = (2L_i - 1)L_i$ itd. węzły na środkach boków: $N_m = 4L_iL_j$ itd.
5. Prostokątny (rodzina serendipowska)		$N_i = \frac{1}{4ab}(b-x)(a-y)$ $N_i = \frac{1}{4ab}(b+x)(a-y)$ $N_i = \frac{1}{4ab}(b+x)(a+y)$ $N_i = \frac{1}{4ab}(b-x)(a+y)$ Podstawiając $\xi = \frac{x}{a}$ oraz $\eta = \frac{y}{b}$ otrzymuje się: $N_i = \frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i) \qquad \xi_i = \pm 1, \quad \eta_i = \pm 1$

6. Prostokątny drugiego rzędu (rodzina serendipowska)		Węzły narożne: $N_i = \frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(\xi\xi_i+\eta\eta_i-1)$ $\xi_i = \pm 1, \quad \eta_i = \pm 1$ Węzły na środkach boków: $\xi_i = 0, \quad N_i = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta\eta_i)$ $\eta_i = 0, \quad N_i = \frac{1}{2}(1+\xi\xi_i)(1-\eta^2)$
7. Izoparametryczny (czworokąt)		$N_i = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \quad x = N_m(\xi,\eta)\,x_m$ $N_j = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \quad y = N_m(\xi,\eta)\,y_m$ $N_k = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \quad m = (i,j,k,l)$ $N_l = (1-\xi)(1+\eta)$
8. Czworościenny		$N_i = L_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y + d_i z}{6V}$ $a_i = \begin{bmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_m & y_m & z_m \\ x_k & y_k & z_k \end{bmatrix}, \quad b_i = \begin{bmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_m & z_m \\ 1 & y_k & z_k \end{bmatrix}$ $c_i = \begin{bmatrix} 1 & x_j & z_j \\ 1 & x_m & z_m \\ 1 & x_k & z_k \end{bmatrix}, \quad c_i = \begin{bmatrix} 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}$

		V – objętość czworościanu
9. Prostopadłościan (rodzina serendipowska)		$N_i = \frac{1}{8}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(1+\xi\xi_i)$
10. Prostopadłościan drugiego rzędu (rodzina serendipowska)		Węzły narożne: $N_i = \frac{1}{8}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(1+\zeta\zeta_i)(\xi\xi_i+\eta\eta_i+\zeta\zeta_i-2)$ Węzły na środkach boków: $\xi_i = 0,$ $N_i = \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta\eta_i)(1+\xi\xi_i)$ itd.

13.3.6 Aproksymacja lokalna i globalna.

Przedstawione w tabeli 13.3. funkcje kształtu wyrażone są w lokalnych, charakterystycznych dla danego typu elementu układach współrzędnych wraz z lokalną numeracją jego węzłów. Dla zbudowania macierzy dla całego obszaru niezbędna jest transformacja macierzy poszczególnych elementów do układu globalnego. Procedura ta jest prosta i polega na dodaniu do właściwych pozycji macierzy całego układu równań odpowiednich wyrazów macierzy elementu, zgodnie z numeracją węzłów elementu w układzie globalnym (tak jak w rozpatrywanym uprzednio przykładzie). W ten sposób globalna reprezentacja funkcji aproksymującej jest sumą jej wartości lokalnych uzyskanych z obliczeń wszystkich elementów skończonych. Jeżeli lokalne układy elementów skończonych są obrócone w stosunku do układu globalnego, jak np. dla elementów izoparametrycznych (poz. 7 w tabeli 13.3), zachodzi potrzeba transformacji współrzędnych dla właściwego obliczenia pochodnych i całek. Macierz transformacji $\mathbf{J}$, zwana macierzą Jacobiego, zdefiniowana jest następująco:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \tag{13.39}$$

Transformacja pochodnych wymaga wykonania następującej operacji:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \tag{13.40}$$

Obliczanie całek wykonuje się według wzoru:

$$\int (\bullet)\, dx\, dy = \int (\bullet) |\mathbf{J}|\, d\xi d\eta\,. \tag{13.41}$$

Po transformacji macierzy elementów do układu globalnego otrzymujemy układ równań liniowych w ogólnej postaci macierzowej:

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{b}\,, \tag{13.42}$$

gdzie macierz A jest symetryczna, pasmowa i dodatnio określona.

W wyniku rozwiązania układu równań (13.42), tj. znalezienie wektora $\hat{\mathbf{u}}$, wymaga zastosowania procedury numerycznej bezpośredniej np. Gaussa, metodę rozkładu macierzy na układy trójkątne, metodę sprzężonych gradientów. W przypadku układu równań z dużą, rzadką macierzą najczęściej stosuje się metodę iteracyjnej – Gaussa-Seidela, Jacobiego lub Czybyszewa. W przypadku nieliniowego równania konstytutywnego, np. równania Naviera-Stokesa lub/i nieliniowych warunków brzegowych, otrzymamy układ równań nieliniowych. Rozwiązanie takiego układu równań jest dużo bardziej skomplikowane i trudno jest sformułować jednolite kryterium istnienia rozwiązania bez dodatkowych założeń na macierz układu równań [Fortuna, 2005]. Ogólnie można powiedzieć, że do rozwiązania takiego układu stosuje się

procedury iteracyjne takie jak nieliniowa metoda Newtona, Gaussa-Seidela, lub inne , których szerszy opis można znaleźć w literaturze [Fortuna, 2005], [Björck,1983], [Zienkiewicz, 1978].

13.3.7 Algorytm MES rozwiązania równania przepływu cieczy lepkiej i nieściśliwej.

W punkcie 13.2.4.1 został określony problem przepływu cieczy lepkiej, dla której, w skutek wolnego płynięcia, można w rozważaniach pominąć siły bezwładności - opisany równaniem Stokesa. Przyjmijmy również, że brzeg obszaru składać się będzie z odcinków brzegu stałego i nieprzepuszczalnego na którym obowiązują warunki Dirichleta dla prędkości oraz odcinków brzegu stanowiącego granicę obszaru płynnego, na którym zadane są warunki periodyczności dla ciśnienia oraz prędkości. W niniejszym punkcie przedstawiona zostaniem metoda rozwiązania tego zagadnienia przy wykorzystaniu techniki sprzężonych gradientów i metody elementów skończonych Galerkina.

Wykorzystajmy metodę sprężonych gradientów (ze stałym krokiem iteracyjnym) do rozwiązania następującego zagadnienia opisanego równaniami -. Załóżmy ponadto, że rozważamy ciśnienie kinematyczne, t.j.: $P = \frac{p}{\rho}$:

1° zakładamy znajomość rozkładu początkowego ciśnienia dla $t = 0$:

$$P^0 \text{ - periodycznie na } \Gamma_f ; \tag{13.43}$$

2° dla n ≥ 0 definiujemy $\mathbf{u}^n$ i P^{n+1} za pomocą P^n z równania:

$$-\mu \nabla^2 \mathbf{u}^n = f - \nabla P^n \quad \text{w} \quad \Omega , \tag{13.44}$$

$$\mathbf{u}^n = \mathbf{g} \equiv 0 \quad \text{na} \quad \Gamma_s , \tag{13.45}$$

$$\mathbf{u}^n \quad \text{periodyczne na } \Gamma_f , \tag{13.46}$$

$$P^{n+1} = P^n - \alpha \nabla \cdot \mathbf{u}^n , \tag{13.47}$$

$$P^{n+1} \quad \text{periodyczne na} \quad \Gamma_f . \tag{13.48}$$

Metoda ta jest zbieżna gdy [Głowiński, 1983]:

$$0 < \alpha < 2 \frac{\mu}{N} \tag{13.49}$$

gdzie: N - wymiar przestrzeni, α - parametr mający wymiar kroku czasowego.

Zauważmy jeszcze, że mimo iż problem opisany równaniami (13.43) - (13.48) jest rozwiązaniem n niezależnych zagadnień Dirichleta, to przyjmując, że $\alpha \equiv \Delta t$ w praktyce sprowadza się do rozwiązywania równania różnicowego dla pochodnej po czasie:

$$\frac{P^{n+1} - P^n}{\Delta t} + \nabla \cdot \mathbf{u}^n = 0 . \tag{13.50}$$

Zastosowanie metody elementów skończonych Galerkina do tego zadania wymaga obliczenia macierzy elementów dla wszystkich wyrażeń występujących w równaniach (13.44) i (13.47). Zakładając, że poszukujemy rozwiązania w przestrzeni R^2, dogodnie jest zastosować trójkątne, liniowe elementy

skończone z niewiadomymi składowymi prędkościami w narożach i ciśnieniem w środku elementu traktowanym jako funkcja odcinkami stała.

Stosując klasyczną metodę Galerkina do każdego z równań otrzymujemy dla elementu następujące wyrażenia macierzowe:

z równania (6.65) otrzymamy:

$$\mu \mathbf{A}_{ij}\mathbf{u}_j^n = \mathbf{F}_{xi} - \mathbf{C}_{xi}\mathbf{P}_e^n , \tag{13.51}$$

$$\mu \mathbf{A}_{ij}\mathbf{v}_j^n = \mathbf{F}_{yi} - \mathbf{C}_{yi}\mathbf{P}_e^n , \tag{13.52}$$

z równania (6.68)

$$\mathbf{B}_i\mathbf{P}_e^{n+1} = \mathbf{B}_i\mathbf{P}_e^n - \rho(\mathbf{E}_{xij}\mathbf{u}_j^n + \mathbf{E}_{yij}\mathbf{v}_j . \tag{13.53}$$

Zgodnie z zasadami omówionymi w rozdziale 13.3.3.4 poszczególne wyrazy macierzy obliczane są na podstawie następujących wzorów całkowych:

$$\mathbf{A}_{ij} = \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial \mathrm{N}_i}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{N}_j}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{N}_i}{\partial y}\frac{\partial \mathrm{N}_j}{\partial y}\right) \mathrm{d}\Omega_e , \tag{13.54}$$

Dla cisnienia przy założeniu, że jego wartość w elemencie będzie stała otrzymamy:

$$\mathbf{B}_i = \int_{\Omega_e} 1\,\mathrm{d}\Omega_e , \tag{13.55}$$

$$\mathbf{C}_{\alpha i} = \int_{\Omega_e} \frac{\partial \mathrm{N}_i}{\partial \alpha}\mathrm{d}\Omega_e , \ (\alpha = x, y), \tag{13.56}$$

$$\mathbf{E}_{xij} = \int_{\Omega_e} \mathrm{N}_i \frac{\partial \mathrm{N}_j}{\partial \alpha}\mathrm{d}\Omega_e , \ (\alpha = x, y) , \tag{13.57}$$

$$\mathbf{F}_{\alpha i} = \int_{\Omega_e} \mathrm{N}_i \mathrm{f}_\alpha \,\mathrm{d}\Omega_e , \ (\alpha = x, y) . \tag{13.58}$$

gdzie: i, j oznaczają numery węzłów w elemencie skończonym (np. dla elementów trójkątnych 1 do 3), w przypadku powtarzania się indeksów obowiązuje umowa sumacyjna, *e* - oznacza numer elementu.

Praktyczne obliczenia numeryczne zagadnienia przepływu Stokesa z periodycznymi warunkami brzegowymi zostały przedstawione w rozdziale VI.

13.3.8 Przykłady zastosowania MES.

Przykład 1: Rozwiązanie zagadnienia opływu fundamentu budowli piętrzącej.

Rozpatrzmy zagadnienie opływu budowli piętrzącej posadowionej na gruncie przepuszczalnym dla wód gruntowych. Zakładamy, że mamy do czynienia z ośrodkiem uwarstwionym, złożonym z dwóch warstw o różnych współczynnikach filtracji. Załóżmy, że miąższość warstwy piasku grubego zalegającego pod fundamentem budowli piętrzącej wyżej wynosi $m_1 = 20m$ i współczynnik filtracji wynosi $k = 10^{-4} m/s$. Poniżej tej warstwy zalega warstwa żwiru o miąższości $m_2 = 10m$ i współczynniku filtracji równym $k = 2,5*10^{-3} m/s$.

Pod fundamentem budowli piętrzącej zostały zamontowane dwie ścianki szczelne – jedna o długości $L_1 = 10m$, a druga o długości $L_2 = 15m$. Szerokość fundamentu budowli piętrzącej wynosi $s = 25m$.

Pomiędzy ściankami szczelnymi umiejscowiono dren w postaci rury o średnicy $d = 0.8m$.

Przepływ wód podziemnych odbywa się pod działaniem gradientu wysokości hydraulicznej.

Dla uproszczenia przyjęto, że po stronie odpowietrznej wysokość hydrauliczna wynosi $h = 0m$, a po stronie zbiornika wodnego wysokość $h = -\Delta H$ wysokości spiętrzenia wody.

Poszukujemy funkcji potencjału prędkości filtracji $\Phi = -kh$ i funkcji prądu Ψ.

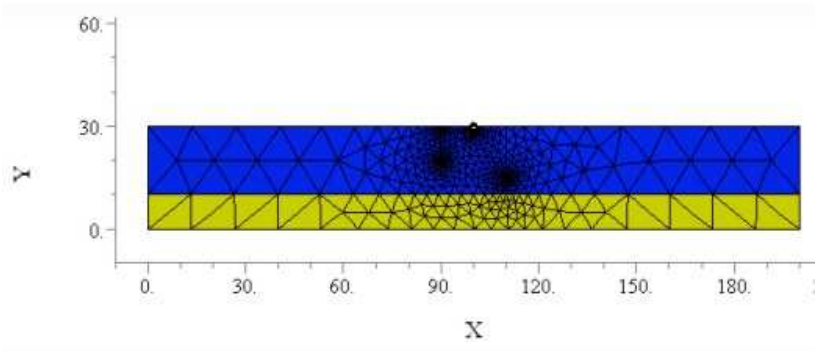
Rozpatrywane zagadnienie dotyczy rozwiązania równania Laplace'a, które dla przypadku obliczania potencjału prędkości filtracji ma postać:

$$\nabla^2 \Phi = 0,$$

a dla przypadku funkcji prądu:

$$\nabla^2 \Psi = 0.$$

Schemat zagadnienia przedstawiono na Rys. 13.20

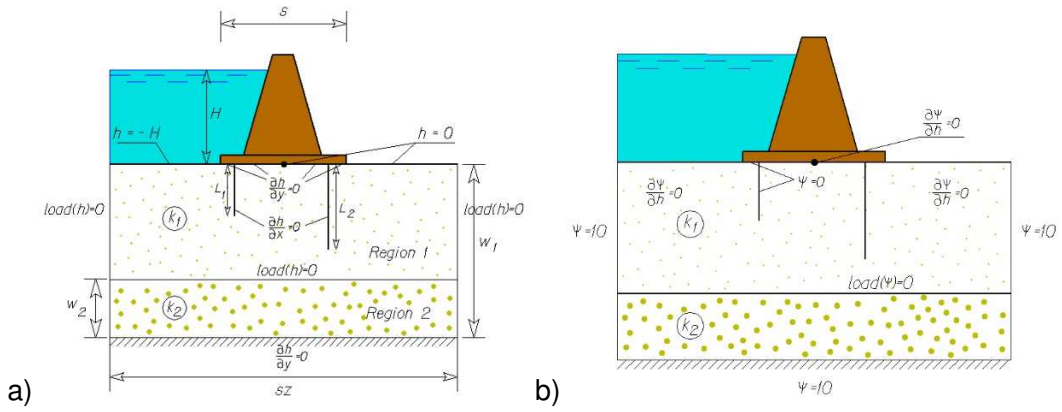


Rys. 13.20. Schemat opływu budowli piętrzącej z wygenerowaną siatką elementów skończonych.

Na brzegach obszaru filtracji przyjęto warunki brzegowe różne w zależności od zagadnienia :

1. poszukiwania potencjału prędkości Φ - przedstawiono na Rys. 13.21a);

2. poszukiwania funkcji prądu Ψ - przedstawiono na Rys. 13.21b) .



Rys. 13.21. Warunki brzegowe zagadnienia opływu budowli piętrzącej dla obliczeń rozkładu linii ekwipotencjalnych wysokości hydraulicznej:

a) dla zagadnienia potencjału prędkości Φ, b) dla zagadnienia funkcji prądu Ψ.

Obliczenia wykonano dla kilku wielkości różnicy wysokości hydraulicznej: $\Delta H = 10m$, $\Delta H = 50m$, $\Delta H = 100m$.

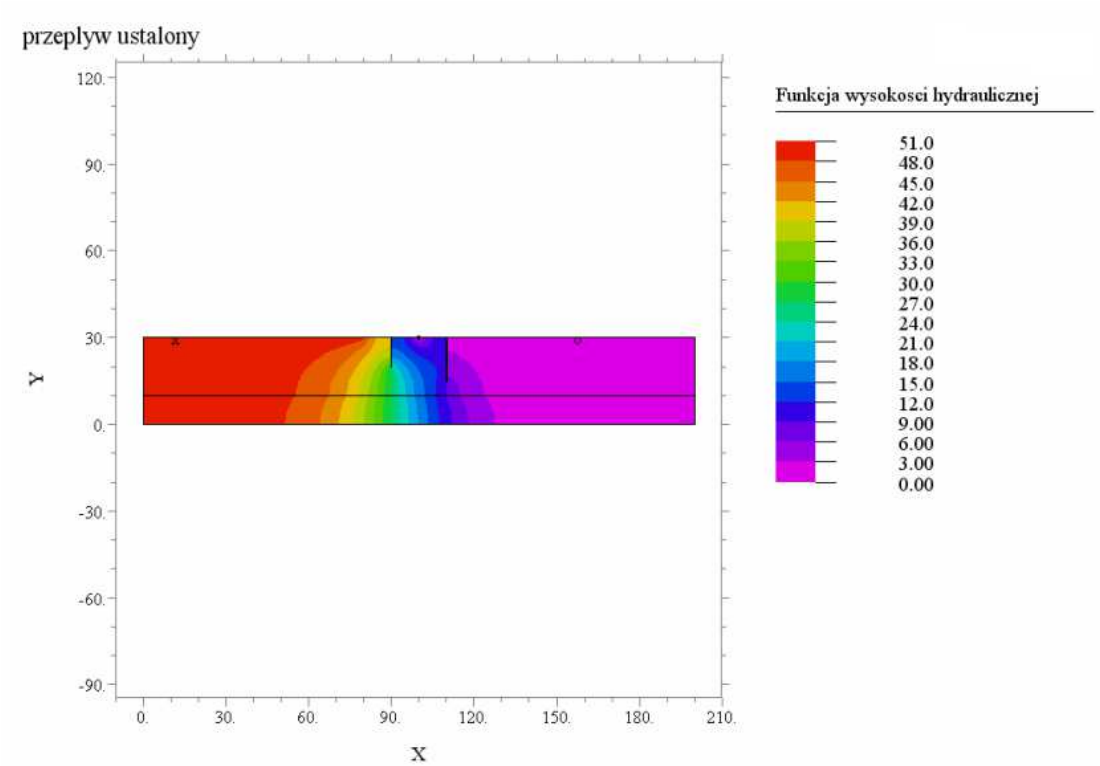
Na Rys. 13.22 przedstawiono wyniki obliczeń wartości funkcji wysokości hydraulicznej dla $\Delta H = 50m$.

Kształt funkcji wysokości hydraulicznej nie ulega zmianie jedynie zmieniają się wartości funkcji $h(x, y)$ Trójwymiarowy wykres zmian wysokości hydraulicznej dla $\Delta H = 50$ przedstawiono na Rys.13. 23.

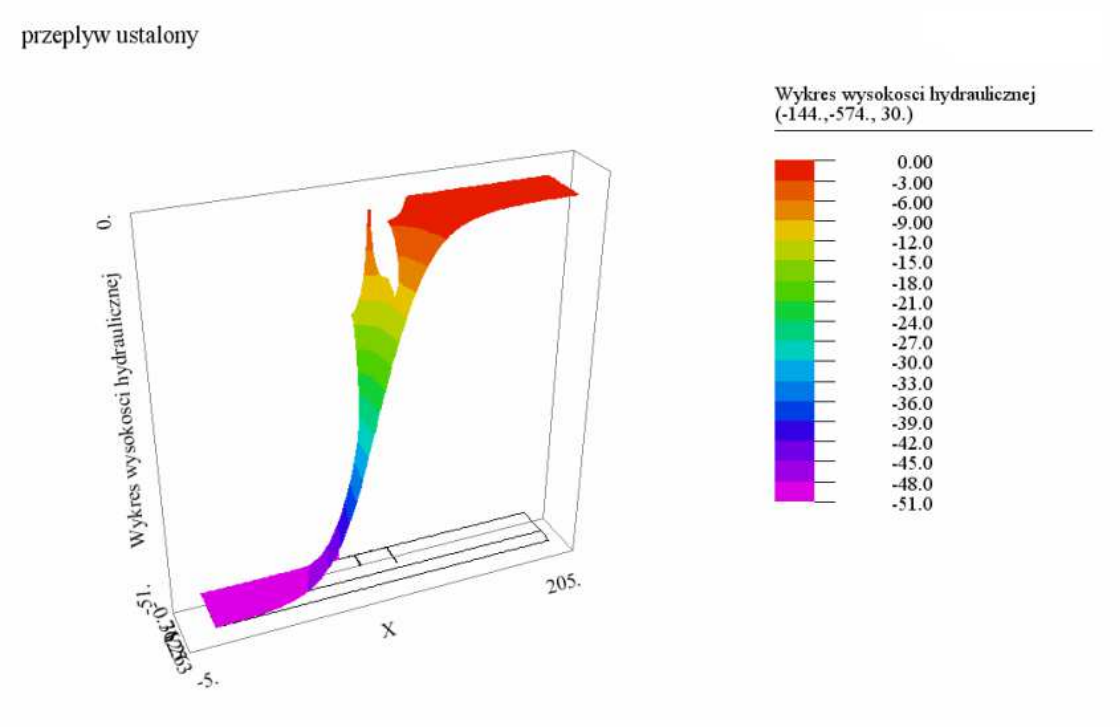
Rozkład wysokości hydraulicznej wzdłuż powierzchni ograniczającej od góry obszar filtracji obrazuje wykres na rys. 13.24 wykonany dla $\Delta H = 50m$.

Na podstawie rys. 13.24 można zauważyć, że ścianki szczelne powodują znaczną redukcję wysokości hydraulicznej, co znacznie zmniejsza niebezpieczeństwo utraty stateczności

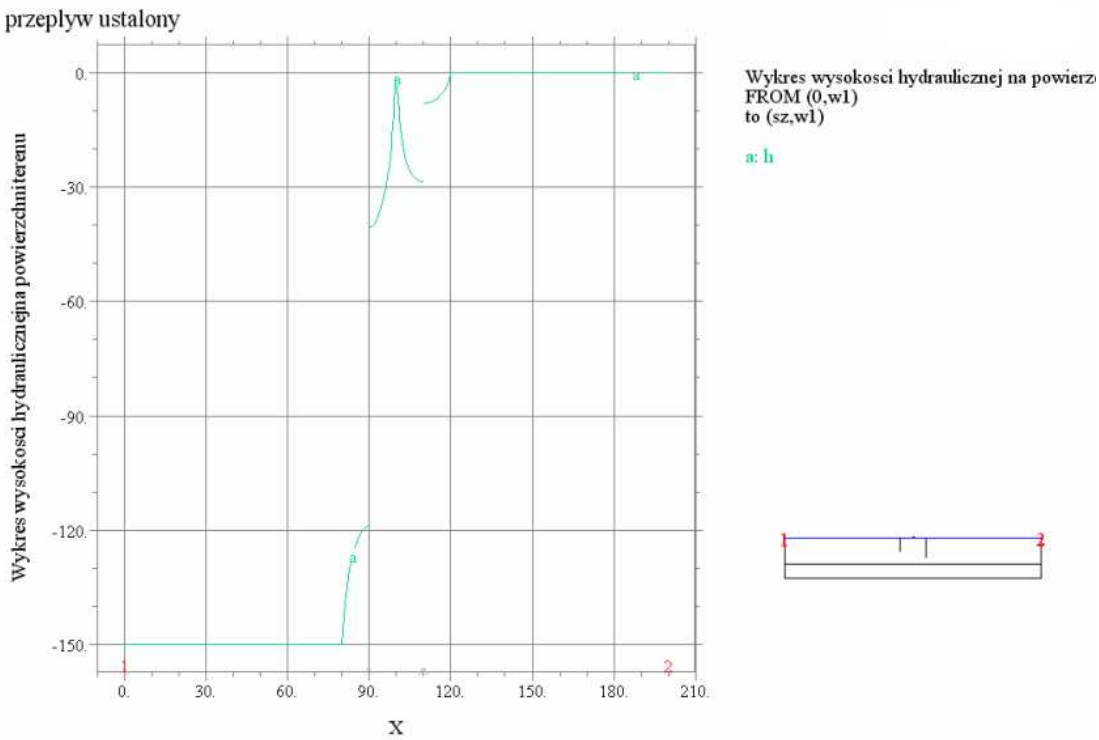
filtracyjnej obszaru filtracji. Dla ilustracji przedstawimy również rozkład wysokości hydraulicznej wzdłuż linii rozgraniczającej obszaru o różnych współczynnikach filtracji – rys. 13.25.



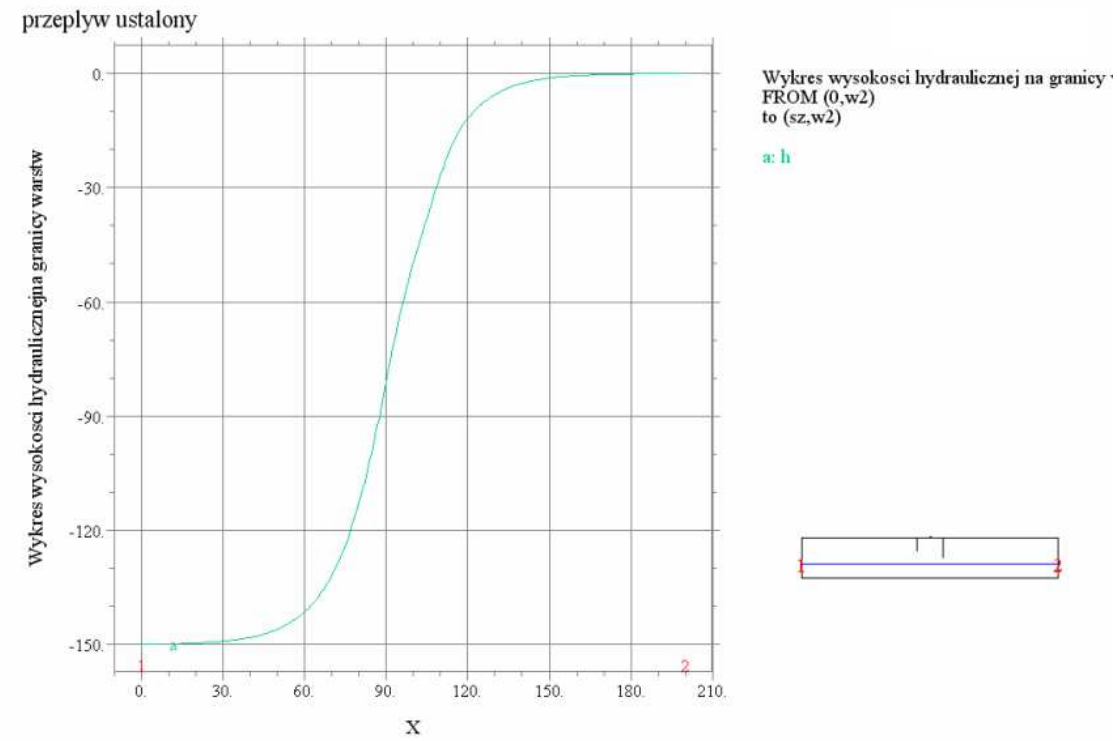
Rys. 13.22. Wyniki obliczeń wartości funkcji wysokości hydraulicznej dla $\Delta H = 50m$.



Rys. 13.23. Trójwymiarowy wykres wysokości hydraulicznej dla $\Delta H = 50m$.



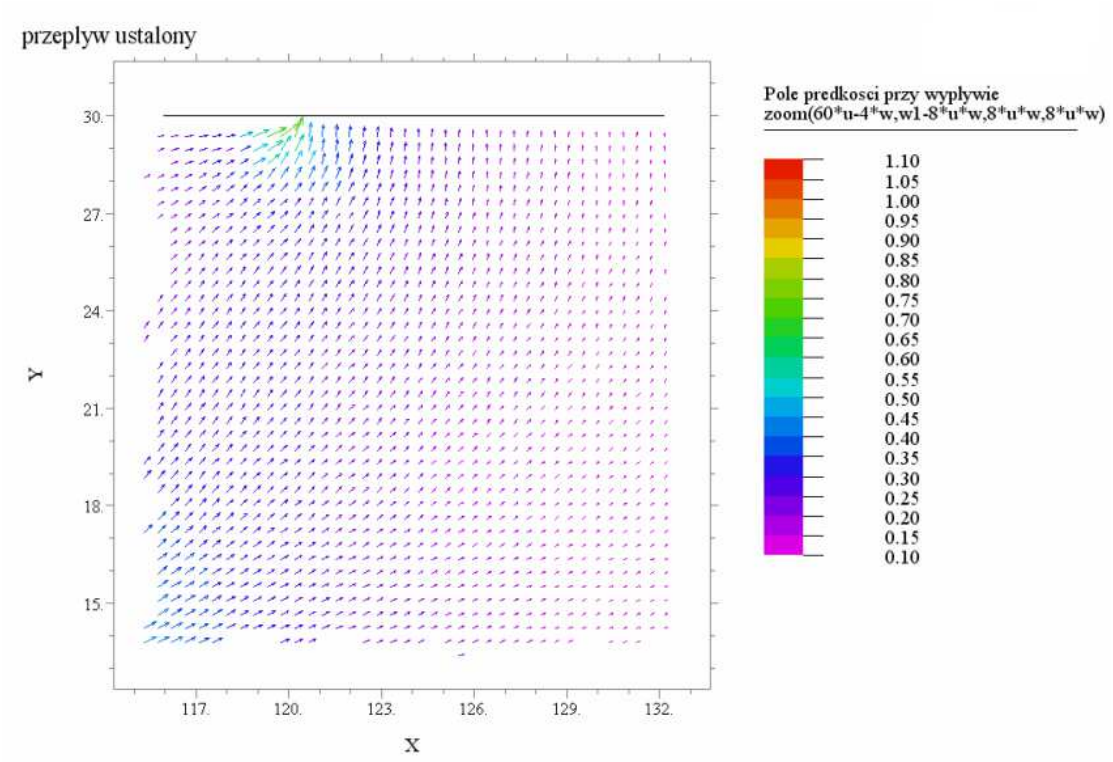
Rys. 13.24. Wykres wysokości hydraulicznej na linii brzegowej ograniczającej od góry obszar filtracji.



Rys. 13.25. Wykres wysokości hydraulicznej na linii rozgraniczającej obszary filtracji o różnych współczynnikach filtracji.

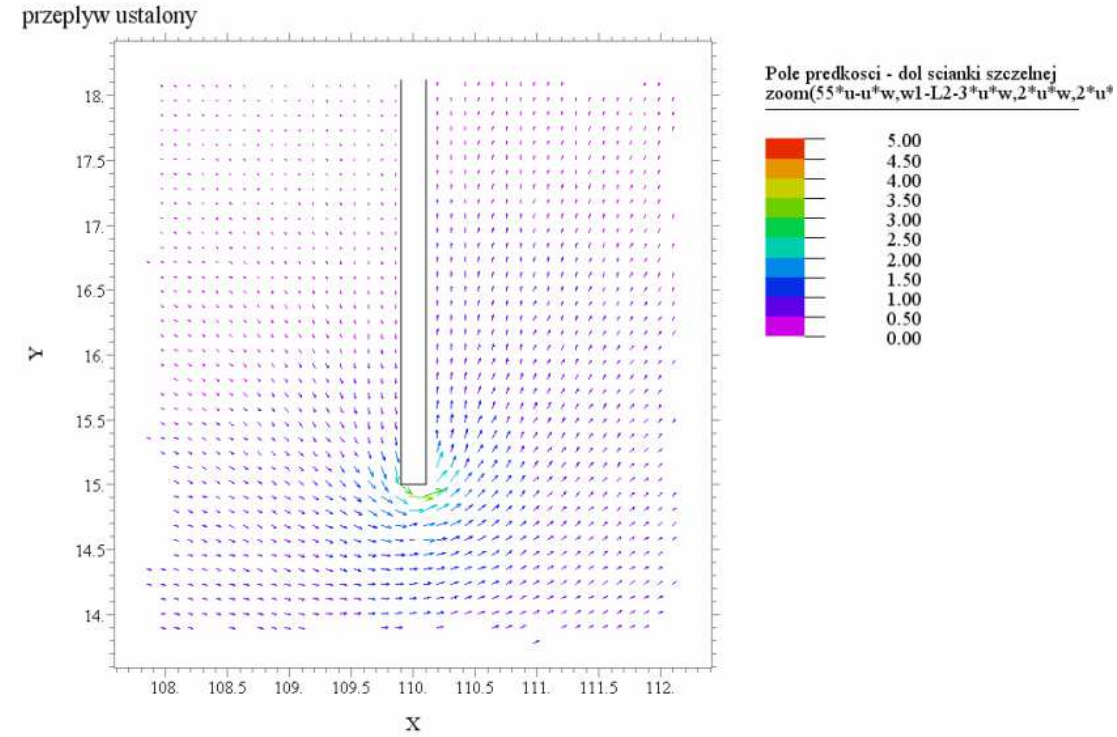
Dla zobrazowania pola prędkości filtracji przedstawione je przykładowo dla trzech lokalizacji:

- w pobliżu wypływu wody z gruntu po stronie odpowietrznej (dla $\Delta H = 50m$) na Rys. 13.26.



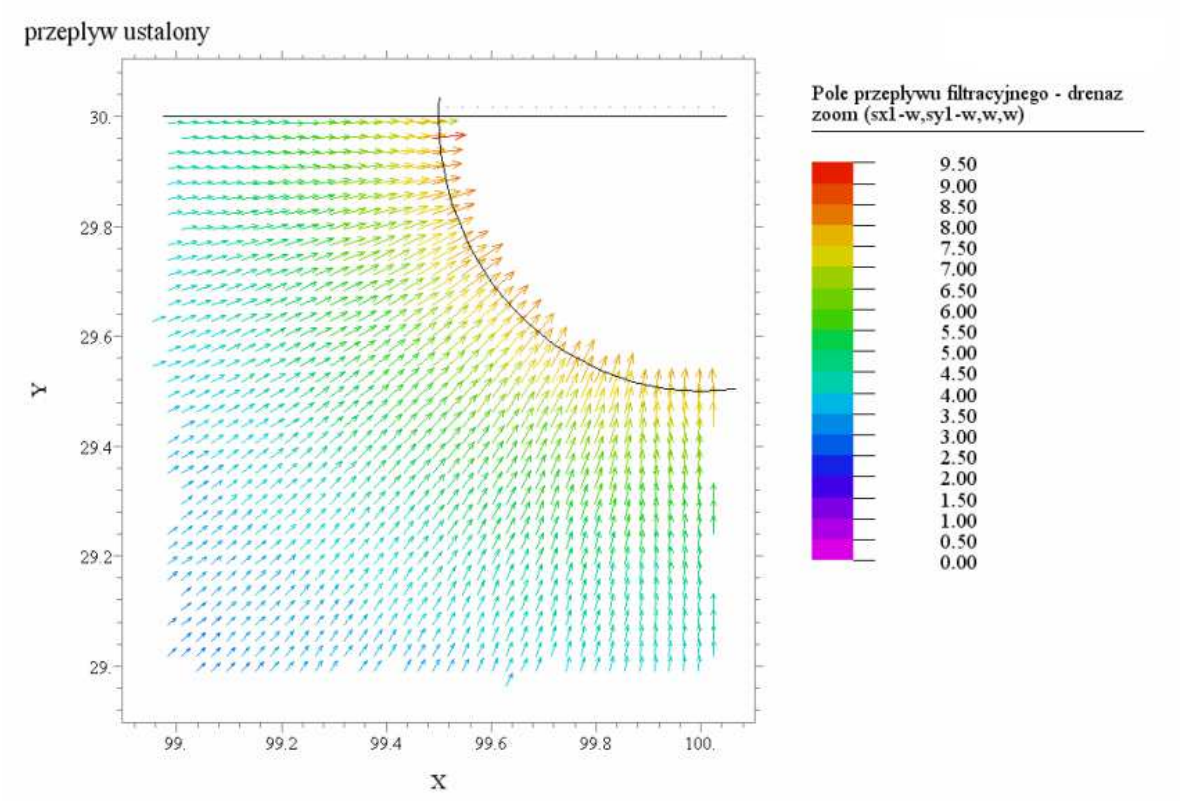
Rys.13.26. Pole prędkości w obszarze wypływu wody po stronie odpowietrznej.

- w okolicy opływu drugiej ścianki szczelnej (dla $\Delta H = 50m$) na Rys.13.27.



Rys. 13.27. Pole opływu w okolicy dolnego końca ścianki szczelnej.

- w okolicy drenu (dla $\Delta H = 50m$) na Rys.13.28:

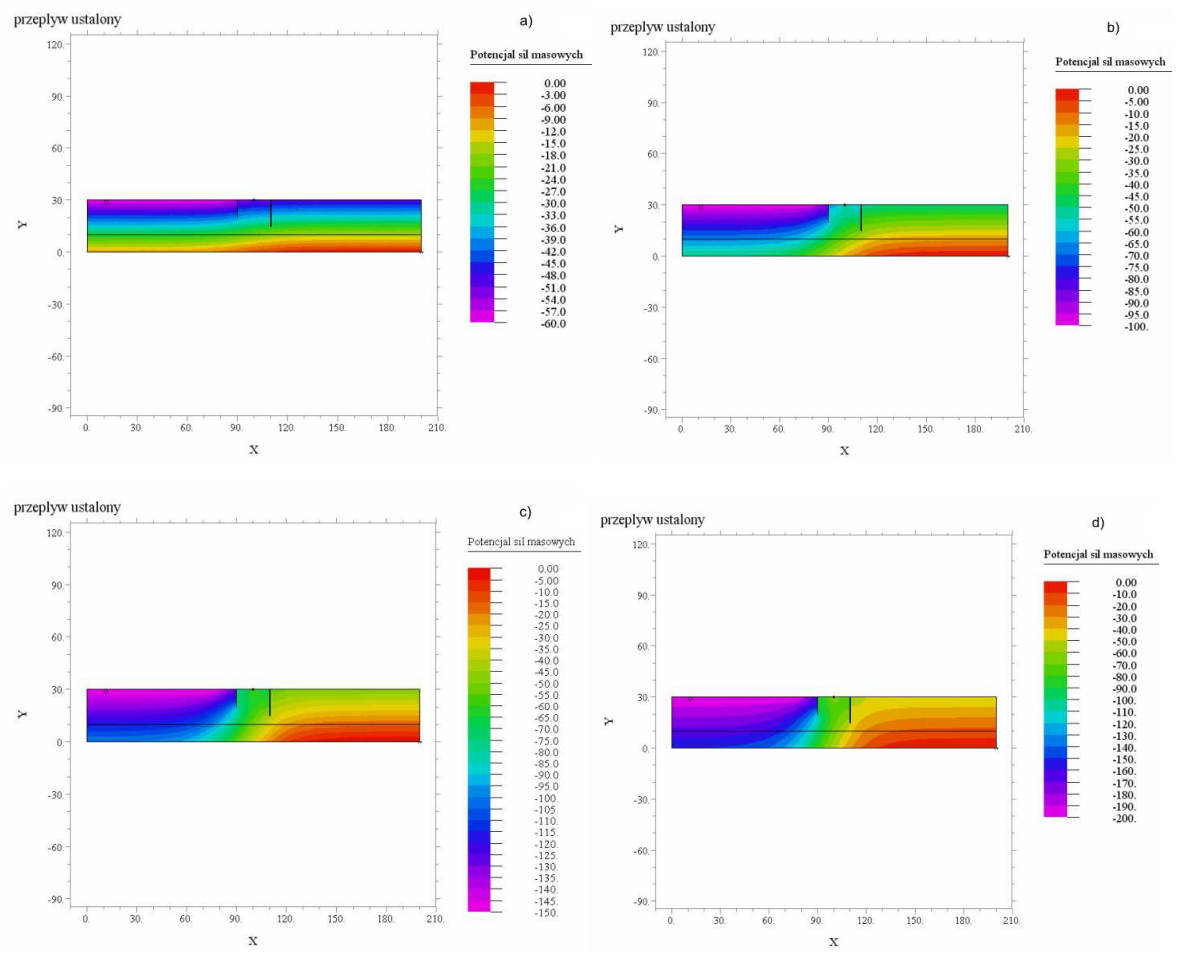


Rys. 13.28. Pole prędkości filtracji w pobliżu drenu.

Przyjmując kryterium zaistnienia stanu upłynnienia gruntu na skutek filtracji, obliczono pole skalarne potencjału sił masowych $\Re$ (patrz rozdz. IV pracy), który wyraża się wzorem:

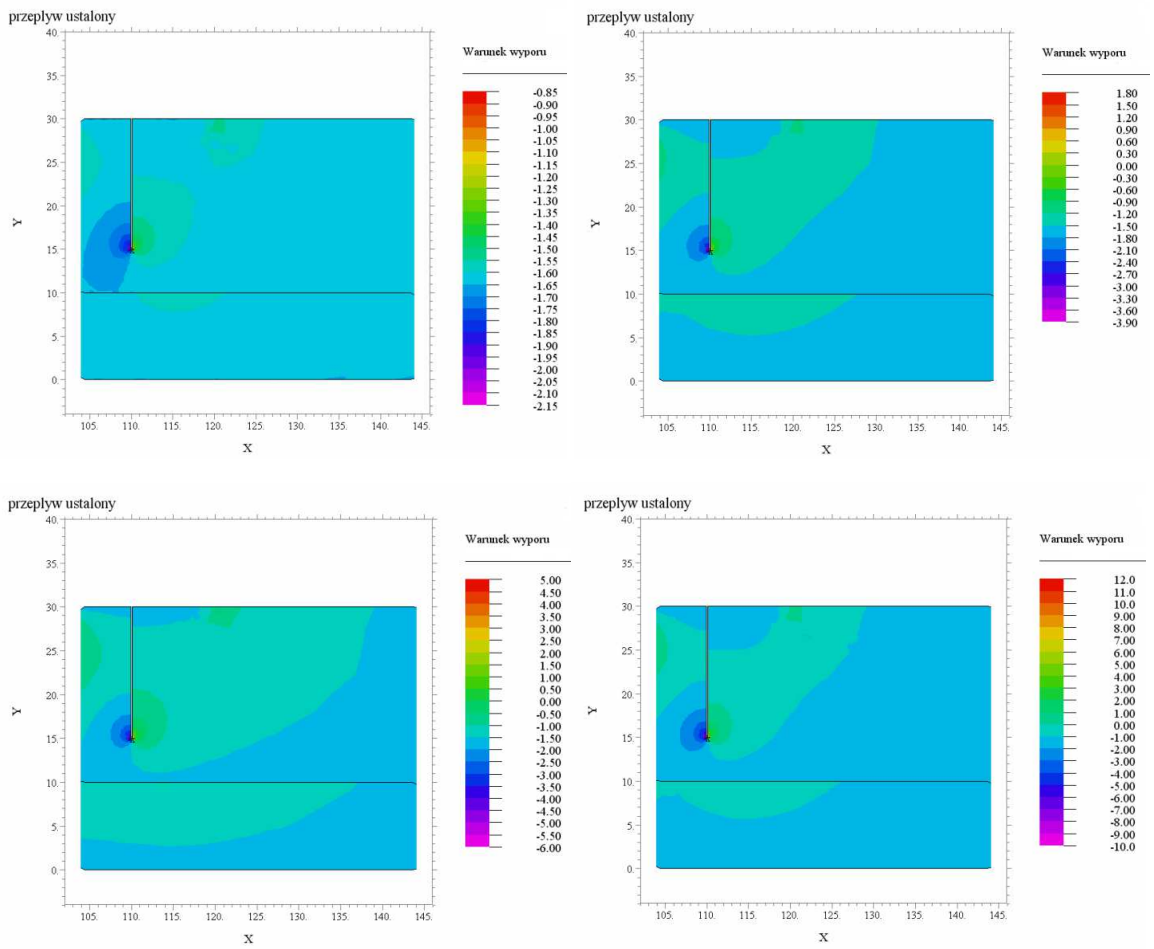
$$\Re = -\left(\rho g H + \Delta^{*} y\right) + \Re_0$$

Wielkość $\Re$ dla poszczególnych trzech wartości $\Delta H = 10m, \Delta H = 50m, \Delta H = 100m$ ma postać wyrażoną na wykresach Rys. 13.29 a) - d)



Rys. 13.213. Pole potencjału sił masowych $\Re$: a) dla $\Delta H = 10m$, b) dla $\Delta H = 50m$, c) dla $\Delta H = 100m$,d) dla $\Delta H = 150m$.

Dla zobrazowania powstanie stref upłynnienia gruntu pokazano na Rys. 13.30. izolinie składowej pionowej sił masowych filtracji dla obszaru najbardziej narażonego na upłynnienie.



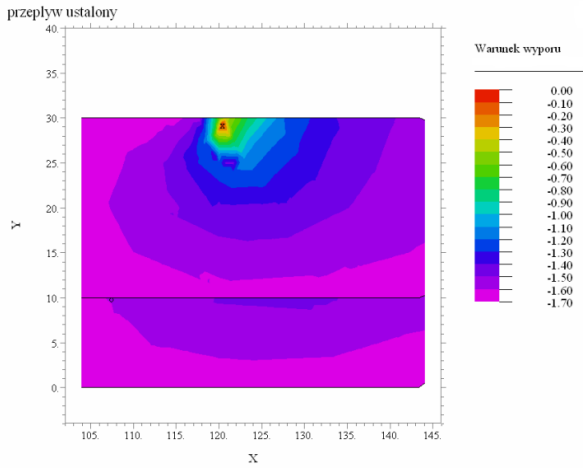
Rys. 13.30. Wykres składowej pionowej sił masowych oddziaływujących na szkielet gruntowy. a) dla $\Delta H = 10m$, b) dla $\Delta H = 50m$, c) dla $\Delta H = 100m$,d) dla $\Delta H = 150m$.

Na podstawie wykresów 13.29 a)-d) widać, że w zależności od gradientu hydraulicznego zmienia się w sposób istotny kształt funkcji potencjału sił masowych, co ma istotny wpływ na stateczność filtracyjną obszaru filtracji.

Z kolei z wykresów 13.30 a)-d) można wnioskować, że dla $\Delta H = 10m$ nie występuje strefa, dla której składowe pionowe sił masowych są mniejsze lub równe zeru, nie ma więc zagrożenia wystąpienia utraty stateczności filtracyjnej. Dla $\Delta H = 50m$ wielkość pionowych sił masowych jest w okolicy dolnego końca ścianki szczelnej rzędu wielkości zera (obszar oznaczony intensywniejszym kolorem zielonym) Sytuacja ta nie zagraża jednakże stateczności całego obszaru filtracji. W przypadku gdy $\Delta H = 100m$ obszary te (kolor intensywnie zielony) są znacznie większe. Jak wynika to z rysunku 13.30d) dla $\Delta H = 150m$ obszar oznaczony kolorem słabym zielonym ma dodatnie wartości składowej pionowej – jest więc obszarem upłynnienia. Trudno

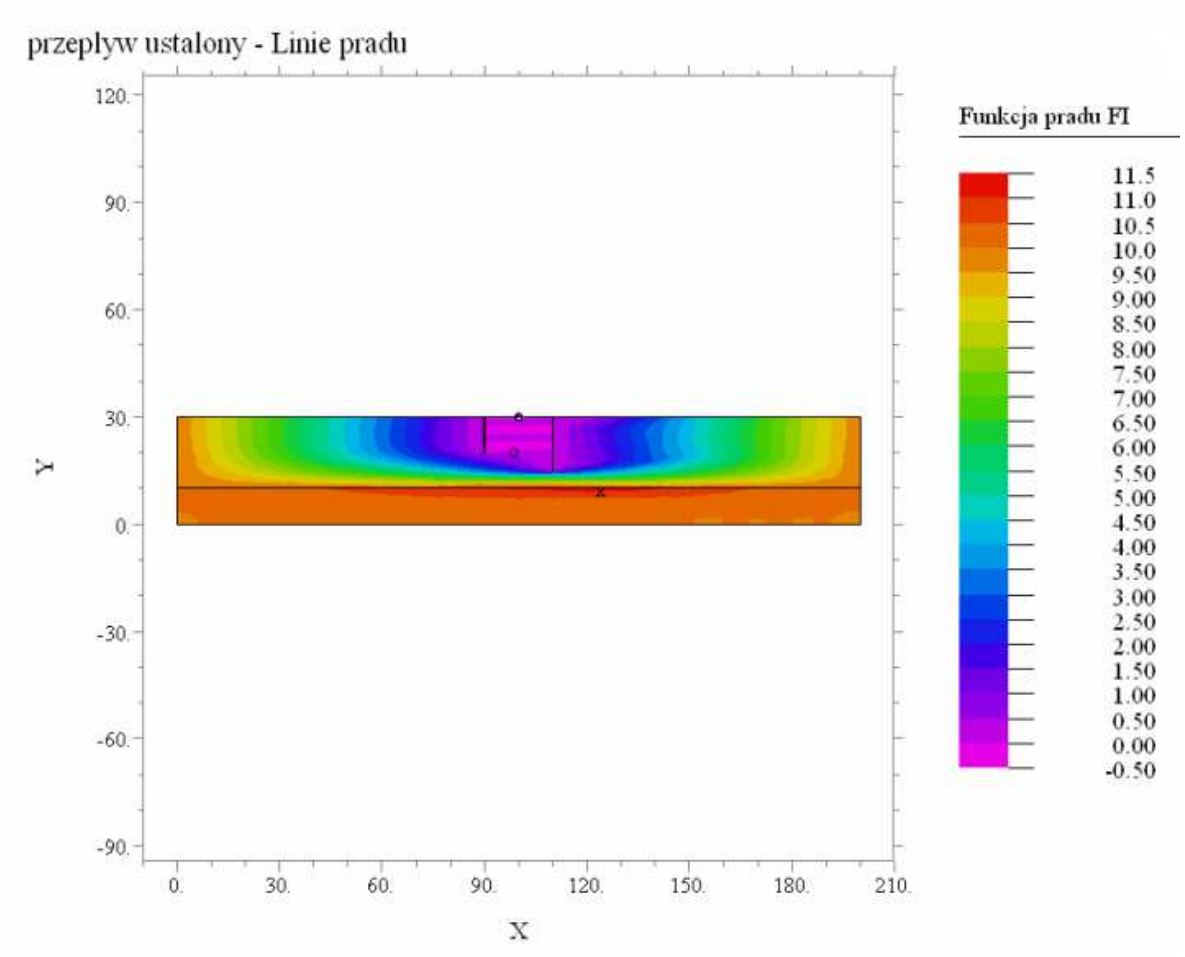
sobie jednakże wyobrazić tak wielkie spiętrzenie wody, więc przyjęte zabezpieczenie w postaci drenu i ścianek szczelnych zabezpiecza w rozpatrywanym przypadku obszar filtracji dla różnicy wysokości hydraulicznej $\Delta h \leq 50m$.

Poniżej, na Rys. 13.31 przedstawiono analogiczny wykres pionowej składowej sił masowych, gdy nie zastosujemy zabezpieczeń w postaci ścianek szczelnych i drenażu, a pozostałe parametry zagadnienia brzegowego pozostawimy bez zmiany. Już przy wysokości spiętrzenia równej 40 m. wartość składowej pionowej siły masowej osiąga wartość zero przy wypływie, co może być przyczyną postępującego upłynnienia całego obszaru.



Rys. 13.31. Wykres składowej pionowej sił masowych oddziaływujących na szkielet gruntowy w przypadku analogicznego zadania ale z pominięciem ścianek szczelnych i drenażu dla $\Delta H = 40m$.

Rozwiązanie drugiego zagadnienia pozwala na określenie funkcji prądu dla rozpatrywanego zadania. Poniżej na Rys. 13.32 przedstawiono wykres funkcji prądu Ψ.



Rys. 13.32. Wykres funkcji prądu.

Przykład 2: Rozwiązanie zagadnienia filtracji przez grodzę ziemną na gruncie przepuszczalnym.

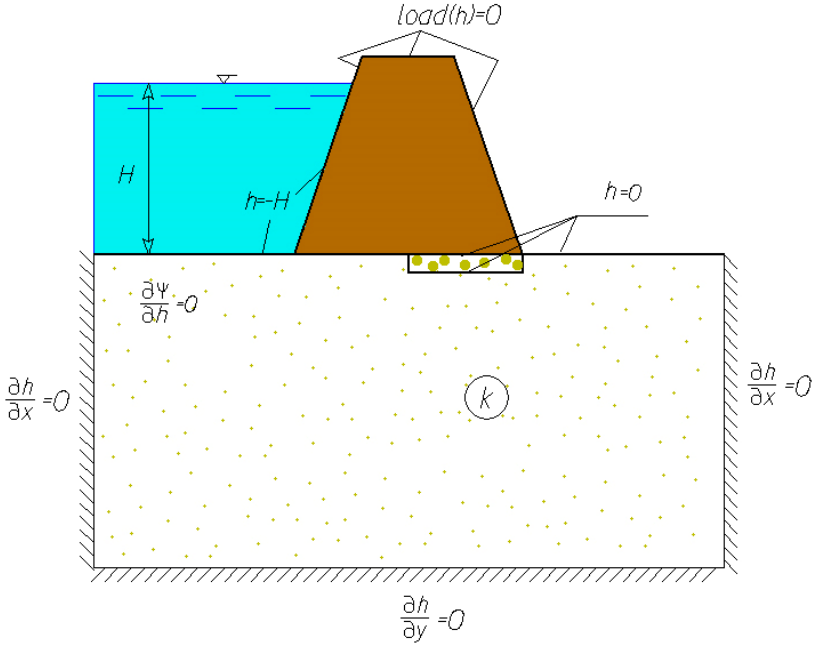
Rozpatrzmy zagadnienie filtracji wody przez grodzę ziemną posadowioną na gruncie przepuszczalnym dla wód gruntowych.

Załóżmy, że miąższość warstwy piasku grubego zalegającego pod grodzą ziemną budowli piętrzącej wyżej wynosi $m_1 = 100m$ i współczynnik filtracji wynosi $k = 10^{-4} m/s$.

Grodza ziemna o wysokości 9m ma skarpy nachylone pod katem 45^0. Po stronie odpowietrznej, u podnóża skarpy został położony dren poziomy o długości 10m. Cała szerokość zapory mierzona u jej podstawy wynosi 20m.

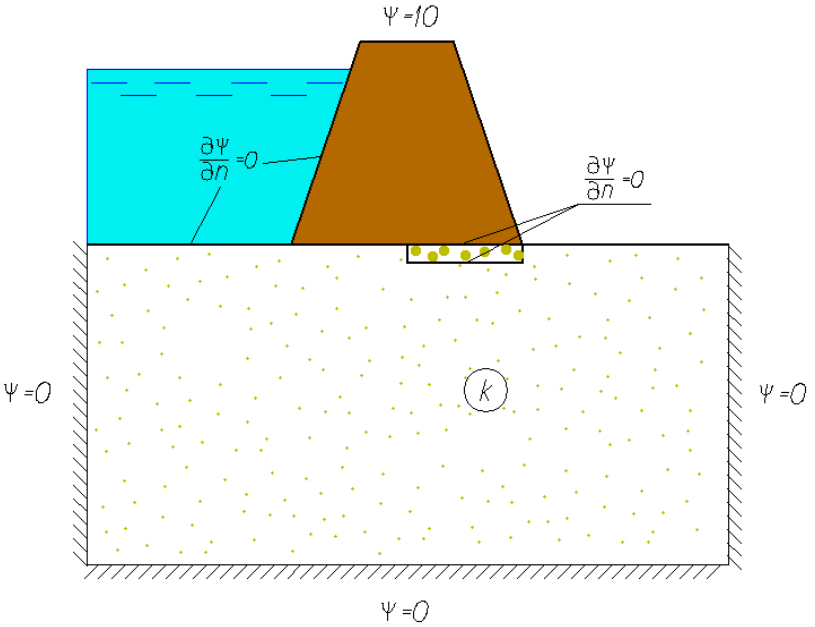
Założono wysokość spiętrzenia wody na 8m. Wykonano obliczenia metodą elementów skończonych przy wykorzystaniu programu Flex PDE5. Obliczenia wykonano w dwóch etapach:

1. obliczono funkcję wysokości hydraulicznej $h(x, y)$, przyjmując warunki brzegowe zagadnienia jak na Rys. 13.33;



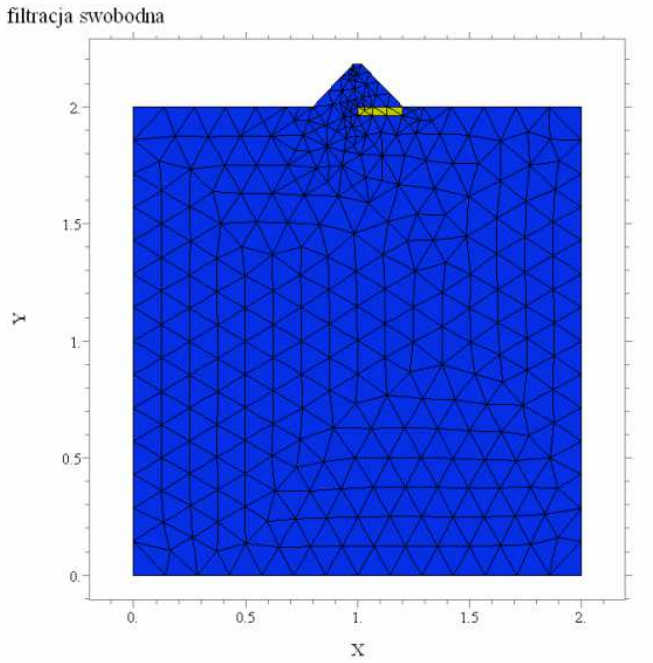
Rys. 13.33. Warunki brzegowe dla obliczeń funkcji wysokości hydraulicznej.

2. obliczono funkcję prądu $\Psi(x, y)$, przyjmując warunki brzegowe jak na Rys. 13.34.



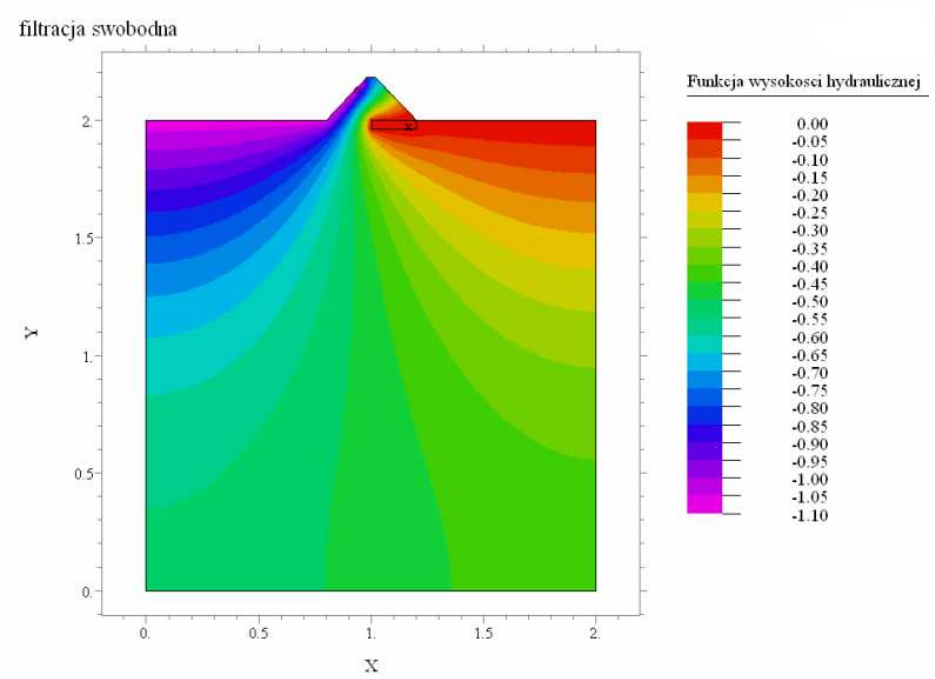
Rys. 13.34. Warunki brzegowe do obliczenia funkcji prądu Ψ.

Geometrię obszaru filtracji wraz z wygenerowaną przez program siatką trójkątnych elementów skończonych przedstawiono na Rys.13.35.



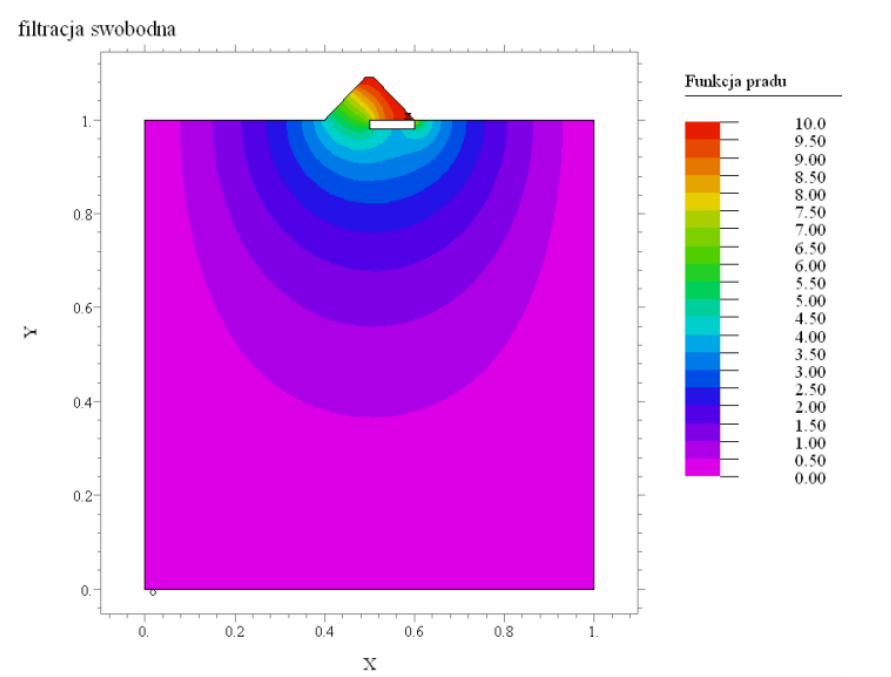
Rys. 13.35. Geometria obszaru filtracji.

W wyniku obliczeń otrzymano wartości funkcji wysokości hydraulicznej, której prezentację graficzną przedstawiono na Rys.13.36



Rys. 2.36. Rozkład wysokości hydraulicznej w obszarze filtracji.

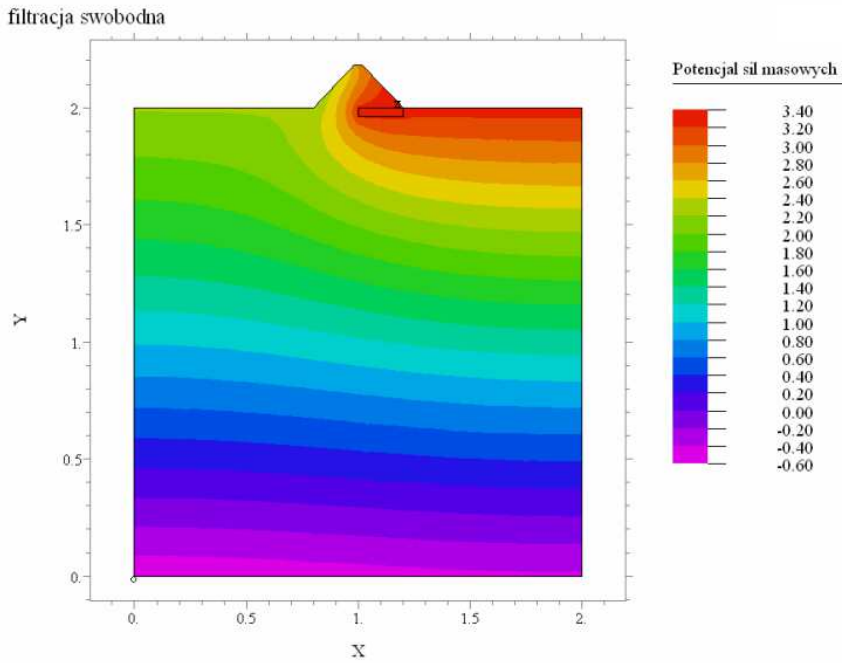
Wartości funkcji prądu dla rozpatrywanego przypadku przedstawiono na Rys. 13.37.



Rys. 13.37 Rozkład funkcji prądu.

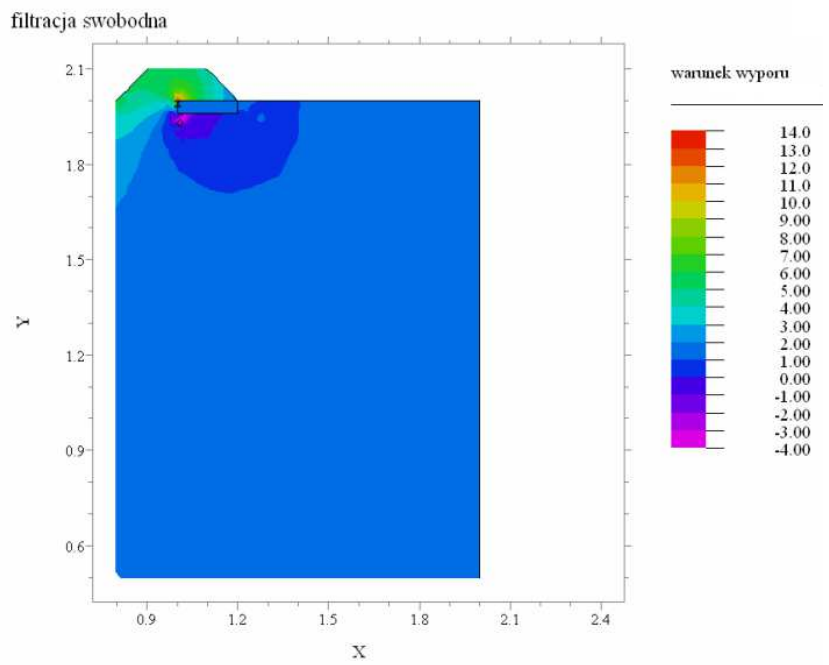
Porównując uzyskane wyniki z rezultatami obliczeń siatki hydrodynamicznej przepływu dla tego przypadku widzimy, że uzyskane wyniki są analogiczne do uzyskanych metodą analityczną.

W procesie obliczeń uzyskano potencjał sił masowych, który przedstawiono na Rys. 13.38.



Rys. 13.38. Potencjał sił masowych.

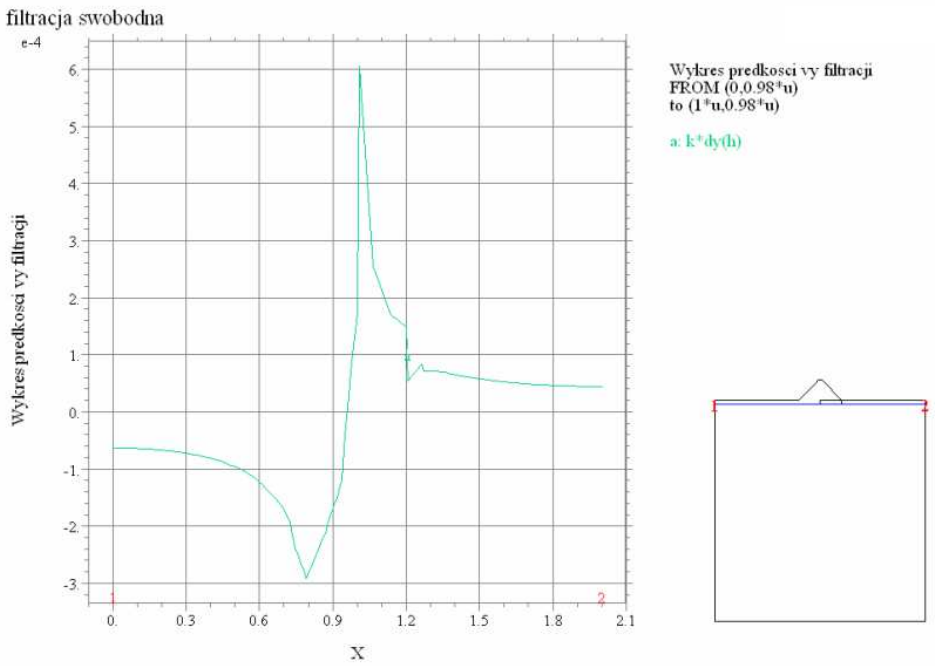
Znając wartości potencjału sił masowych, można obliczyć strefy wypadkowych pionowych sił masowych , określić czy występują i w jakim zakresie obszary narażone na utratę stateczności filtracyjnej. Na przedstawionym poniżej rysunku 13.39 dostajemy taką strefę przy założonej wysokości spiętrzenia wody w okolicy drenu poziomego.



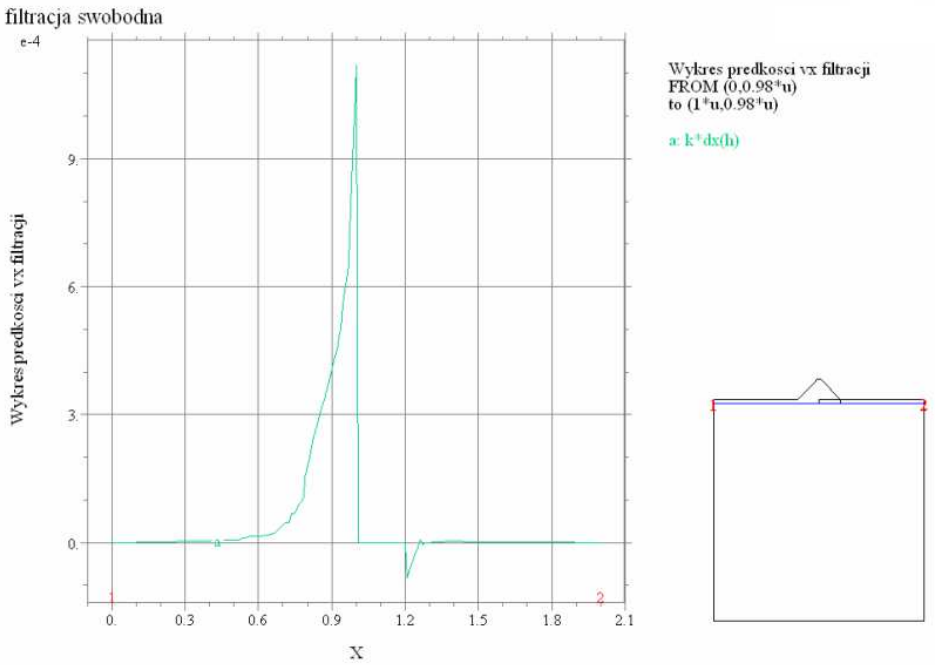
Rys. 13.313. Obszary warunku stateczności filtracyjnej.

Jak widać, obszar przekroczenia warunku stateczności filtracyjnej występuję wewnątrz grodzy w okolicy końca drenu. Ponadto w dość obszernym obszarze wypadkowa pionowa siła masowa jest bliska zeru .Jak widać, przyjęty poziom spiętrzenia wody stwarza dla przyjętego modelu filtracji sytuację bliską utraty stateczności filtracyjnej. Na pewno w obszarze drenu możemy liczyć się z sufozją drobniejszych cząstek i przemieszczenie się ich do obszaru drenu, co może powodować kolmatację drenu, szczególnie w przypadku gdy do jego wykonania użyto materiałów geotekstylnych.

Poniżej na Rys. 13.40 i Rys. 13.41 przedstawiono wykresy prędkości v_x i v_y filtracji wzdłuż linii poziomej stycznej do drenu poziomego.



Rys. 13.40. Wykres prędkości pionowej wzdłuż linii 1-2.



Rys. 13.41. Wykres prędkości poziomej wzdłuż linii 1-2.

Przykład 3: Rozwiązanie zagadnienia porosprężystości Biota wywołanej działaniem drenów i obciążenia.

Rozwiążemy płaskie zadanie porosprężystości w płaskim stanie odkształcenia.

Układ równań porosprężystości Biota wyrażony w przemieszczeniach sprowadza się do układu trzech równań różniczkowych cząstkowych, które zgodnie z teorią konsolidacji Biota przedstawioną w rozdziale IV , ma postać:

$$
\begin{aligned}
&(M+2N)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+N\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(M+N)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=-\frac{H}{R}\frac{\partial\sigma}{\partial x},\\
&(M+2N)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+N\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+(M+N)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{H}{R}\frac{\partial\sigma}{\partial x},\\
&\nabla^2\sigma=\frac{1}{RK}\frac{\partial\sigma}{\partial t}-\frac{H}{RK}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial t}\right),
\end{aligned}
\tag{13.59}
$$

gdzie:

- u oznacza przemieszczenie w kierunku osi x,
- v oznacza przemieszczenie w kierunku osi y,
- σ oznacza naprężenie w cieczy powiązane z ciśnieniem p związkiem:

$$\sigma=-fp\,, \tag{13.60}$$

- K jest współczynnikiem wyrażonym wzorem:

$$K=\frac{k}{f^2\rho g}\,, \tag{13.61}$$

przy czym k jest wspólczynnikiem filtracji Darcy'ego, f oznacza porowatość, a ρg określa ciężar właściwy wody

- M,N,H,R są to stałe Biota rozważanego ośrodka .

Powyższy układ przemieszczeniowych równań porosprężystości Biota uzupełniają:

Związki konstytutywne ciała Biota dla przypadku procesów izotermicznych:

$$\sigma_{xx} = \left(2N + M - \frac{Q}{R}\right)\varepsilon_{xx} + \left(M - \frac{Q}{R}\right)\varepsilon_{yy} + \frac{1}{R}\sigma,$$
$$\sigma_{xx} = \left(M - \frac{Q}{R}\right)\varepsilon_{xx} + \left(2N + M - \frac{Q}{R}\right)\varepsilon_{yy} + \frac{1}{R}\sigma, \qquad (13.62)$$
$$\tau_{xy} = \left(M - \frac{Q}{R}\right)\varepsilon_{xy},$$

gdzie

- σ_{xx} jest naprężeniem normalnym w kierunku osi x,
- σ_{yy} jest naprężeniem normalnym w kierunku osi y,
- τ_{xy} jest naprężeniem stycznym,
- $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}$ są odkształceniami określonymi związkami geometrycznymi.

Związki geometryczne w przypadku małych odkształceń (związki liniowe):

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x},$$
$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad (13.63)$$
$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Dla przedstawionego powyżej rozwiązano przykładowo dwa zagadnienia:

a. konsolidację warstwy o skończonej miąższości pod wpływem działania drenów kołowych o określonej średnicy: jednego odprowadzającego ciecz z ośrodka na skutek działania podciśnienia względem ciśnienia atmosferycznego; drugiego nawadniającego ośrodek na skutek nadciśnienia względem ciśnienia atmosferycznego,
b. konsolidację warstwy pod wpływem obciążenia przekazywanego przez sztywną płytę fundamentową na grunt i drenażu poziomego w postaci rurek drenarskich.

Ad a) Rozwiązanie zagadnienia asymetrycznego odkształceń ciała Biota pod wpływem dodatniego i ujemnego źródła kołowego cieczy.

Zagadnienie odkształceń ośrodka Biota pod wpływem źródeł cieczy było tematem licznych publikacji [Gaszyńskiego 1998, 2004].

Do obliczeń przyjęto następujące wielkości parametrów ośrodka:

Współczynnik filtracji $k = 1,5 * 10^{-9} m/s$,

Porowatość: $f = 0,3$,

Ciężar właściwy wody: $\rho g = 10^4 N/m^3$,

Stałe Biota, na podstawie dysertacji doktorskiej [Emmricha, 1984], dla kaolinitu z kopalni „Maria" w Nowogródźcu:

$N = 250MPa$,

$M = 80MPa$,

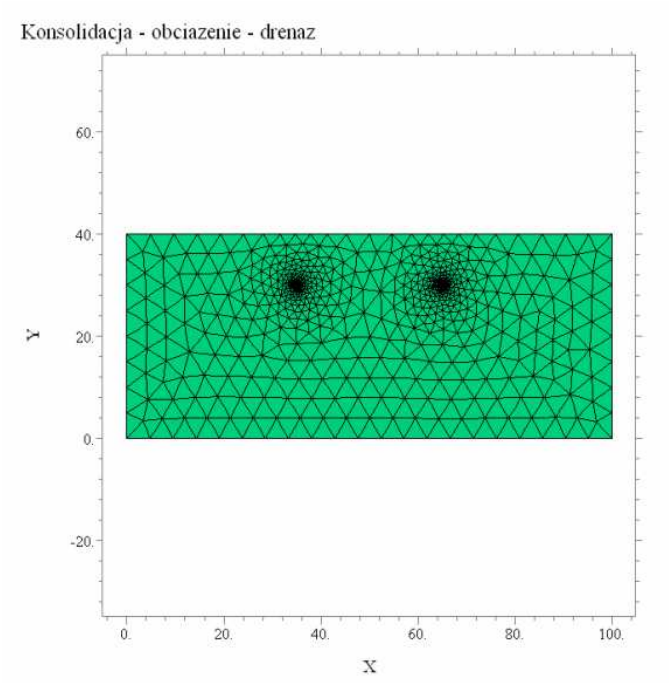
$R = 150MPa$,

$H = 750MPa$.

Przyjęto, że warstwa ośrodka ma miąższość równą $mi = 40m$ oraz przyjęto, że rozpiętość warstwy wynosi $ld = 100m$.

Średnicę drenów przyjęto równą $d = 0,4m$, a ich usytuowanie jest symetryczne względem osi pionowej przechodzącej przez współrzędną $ld/2$.

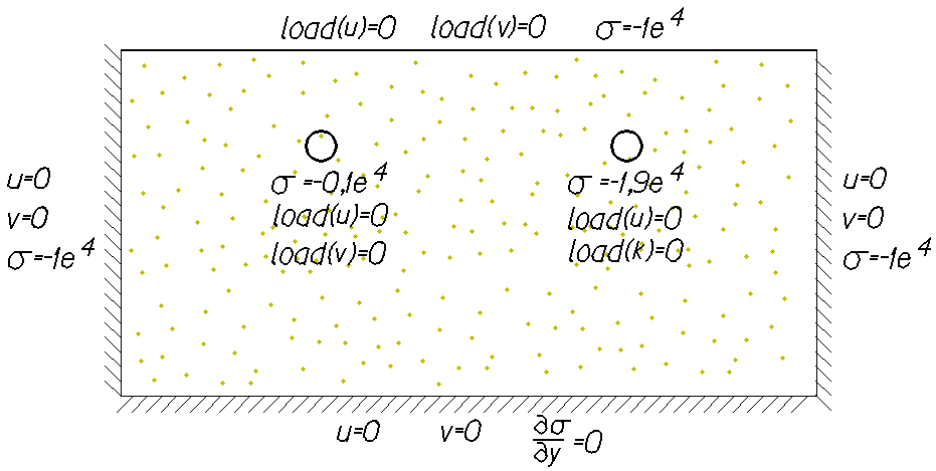
Siatkę elementów skończonych oraz geometrię obszaru pokazano na Rys. 13.42.



Rys. 13.42. Geometria zagadnienia.

Warunki graniczne zagadnienia.

Warunki brzegowe przedstawiono schematycznie na Rys.13.43.



Rys. 13.43. Warunki brzegowe zagadnienia.

Przyjęto następujące warunki początkowe:

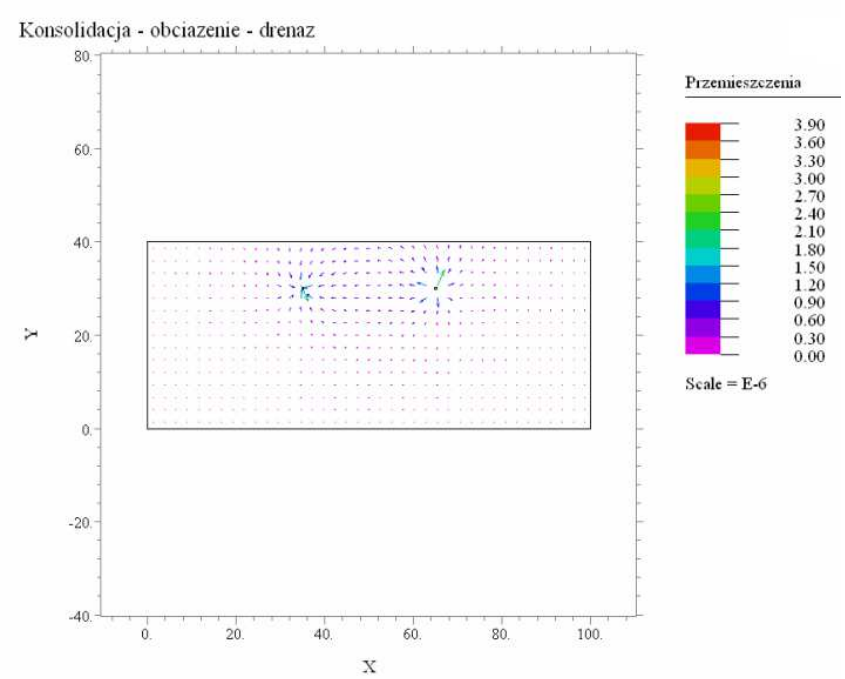
$$u^{(0)} = 0, \quad v^{(0)} = 0, \quad \sigma^{(0)} = -10 \ kPa.$$

Obliczenia wykonano dla czasów:

$t = 0.1s, 1s, 10s, 10^2 s, 10^3 s, 10^4 s, 10^5 s, 10^6 s, 10^7 s, 10^8 s, 10^9 s, 10^{10} s, ... 10^{20} s$.

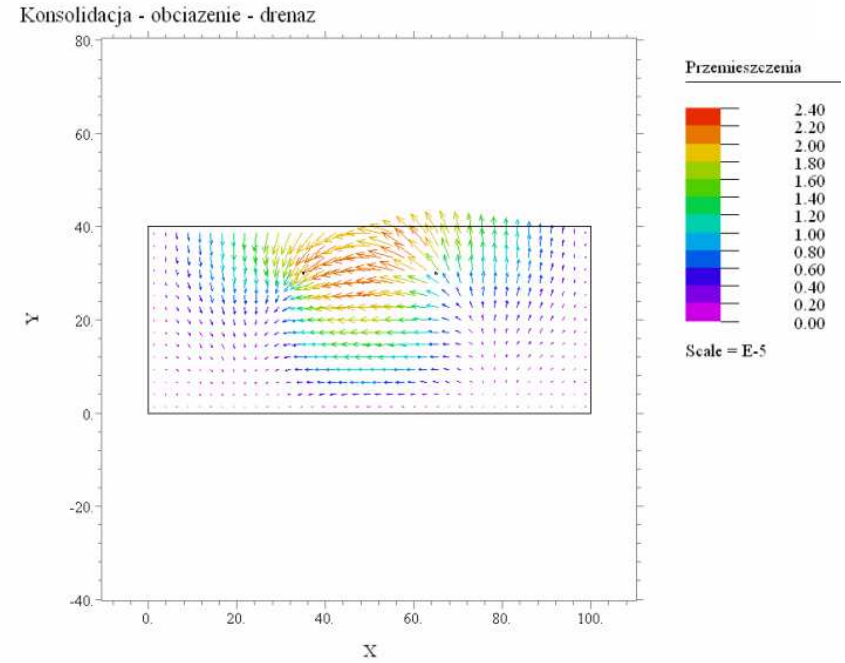
Poniżej przedstawimy tylko wybrane rezultaty dla czasu: $t = 1s$ i $t = 10^{20} s$.

Przemieszczenia dla czasu $t = 1s$ przedstawiono na Rys. 13.44.



Rys. 13.44. Pole wektorowe przemieszczenia dla $t = 1s$.

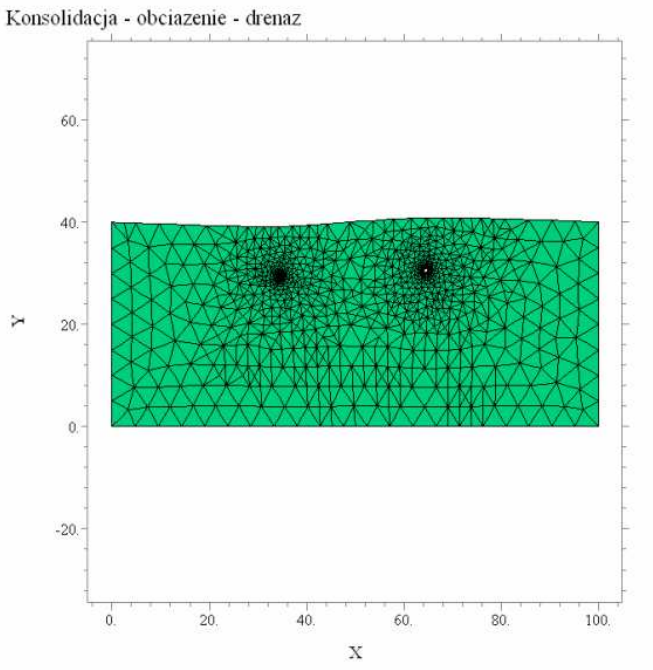
Pole przemieszczeń po zakończenie procesu konsolidacji obrazuje Rys. 13.37.



Rys. 13.45. Pole wektorowe przemieszczeń dla $t = 10^{20} s$.

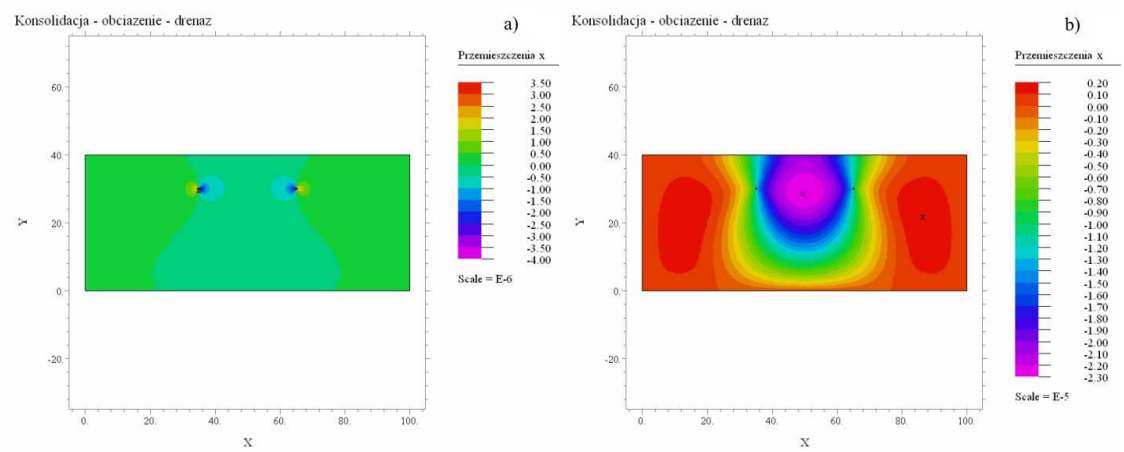
Widać wyraźnie różnicę pomiędzy stanem początkowym pola przemieszczeń a polem po zakończeniu procesu konsolidacji ciała Biota.

Dla zobrazowania pola przemieszczeń węzłów siatki elementów skończonych przedstawiono je w skali skażonej po zakończeniu procesu konsolidacji na Rys. 13.46 (przemieszczenia węzłów przemnożono przez liczbę 500).



Rys. 13.46. Przemieszczenia węzłów siatki po czasie $t = 10^{20}\,s$.

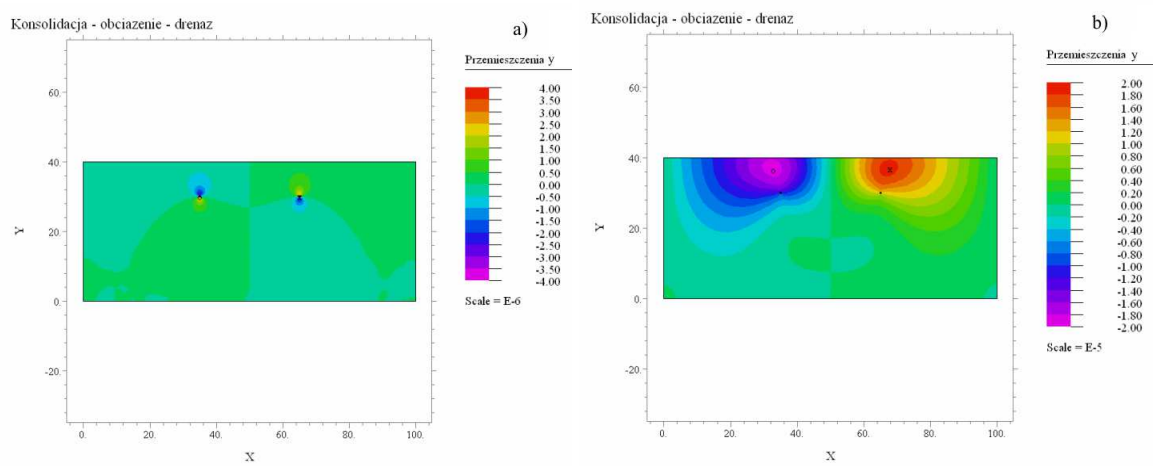
Pole przemieszczeń poziomych dla czasu $t = 1s$ przedstawiono na Rys. 13. 47a), natomiast pole przemieszczeń poziomych dla $t = 10^{20}\,s$ na Rys. 13.47b). Zarówno dla czasu początkowego, jak i po czasie odpowiednio długim, aby uznać, że proces odkształceń się zakończył, obraz jest symetryczny względem osi pionowej przechodzącej przez połowę szerokości modelu obliczeniowego, co zgodne jest z intuicją.



Rys. 13.47. Rozkład przemieszczeń poziomych dla czasu:

a) dla $t = 1s$; b) dla $t = 10^{20} s$.

Analogicznie rozkład przemieszczeń pionowych przedstawiono dla czasu $t = 1s$ na Rys. 13.48a) oraz dla czasu $t = 10^{20} s$ na Rys. 13.48b). Wynik obliczeń pokazuje antysymetryczny charakter rozkładu przemieszczeń w obszarze konsolidacji.

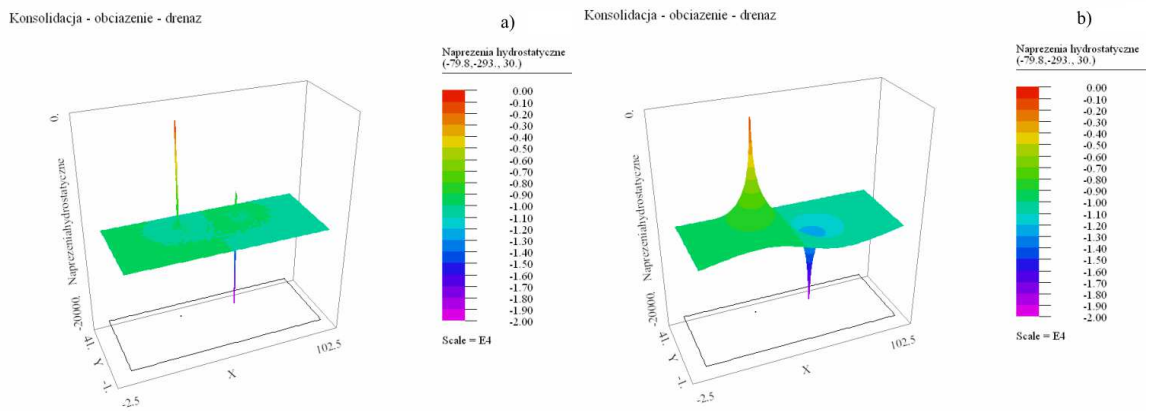


Rys. 13.48. Rozkład przemieszczeń pionowych dla czasu:

a) dla $t = 1s$; b) dla $t = 10^{20} s$.

Poniżej przedstawimy porównanie naprężeń hydrostatycznych σ prawie „natychmiastowych" po czasie $t = 0{,}1s$ na Rys. 13.49a oraz po czasie $t = 10^{20} s$ na Rys. 13.49b. Widzimy, że po odpowiednio długim czasie naprężenia hydrostatyczny tworzą w obszarze filtracji

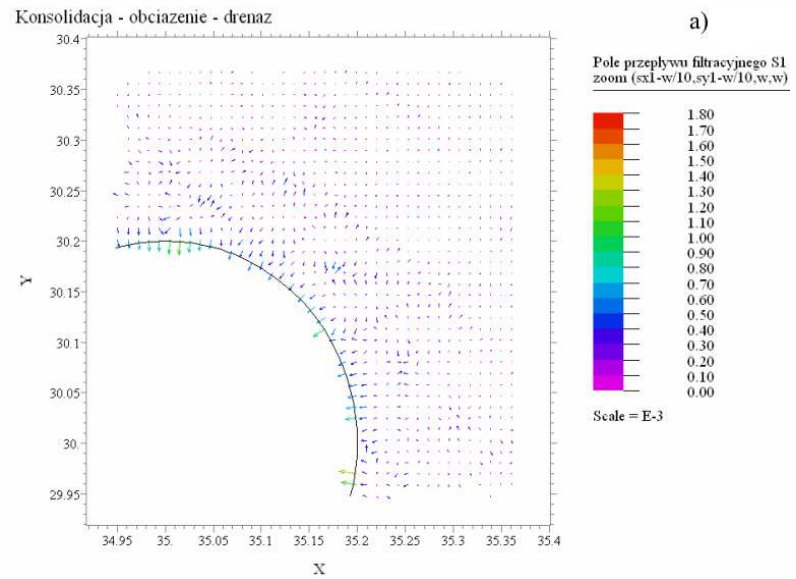
antysymetryczne dwa leje przechodzące jeden w drugi. Rozkład ciśnień σ pozwala określić linie prądu filtrującej przez ośrodek cieczy.

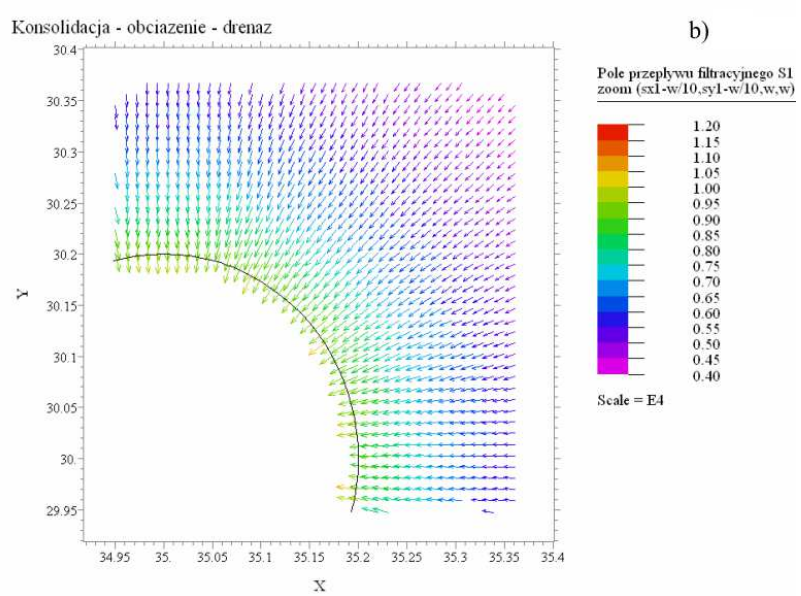


Rys. 13.413. Trójwymiarowy naprężeń wykres hydrostatycznych:

a) dla $t = 0{,}1s$ **; b) dla** $t = 10^{20}s$ **.**

Program pozwala na obserwację przepływu wody w ośrodku konsolidującym. Dla przykładu pokażemy pole prędkości filtracji w pobliżu drenu odciągającego wodę z ośrodka (drenu ujemnego) dla momentu $t = 1s$ na Rys. 13.50a) oraz dla $t = 10^{20}s$ na Rys.13.50b).

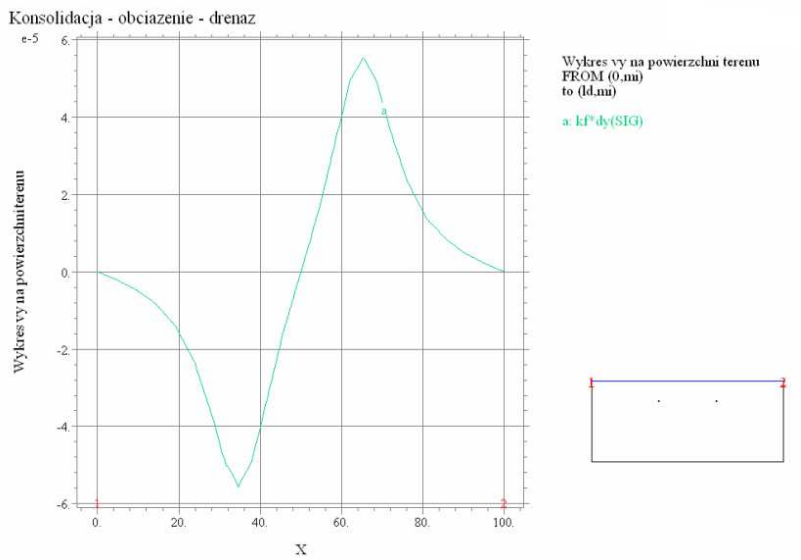




Rys. 13.50. Pole prędkości w pobliżu drenu

a) dla $t = 1s$ **; b) dla** $t = 10^{20} s$

Interesujący jest wykres składowej pionowej prędkości filtracji na poziome terenu. Przedstawiono go na Rys. 13.51. Zgodnie z przewidywaniem, wartość składowej pionowej wektora prędkości filtracji zmienia znak i jest skierowana w dół, w kierunku drenu ujemnego (ssącego) w obszarze ponad tym drenem oraz w górę w obszarze drenu dodatniego.



Rys. 13.51. Składowa pionowa prędkości filtracji na brzegu obszaru dla $t = 10^{20} s$ **.**

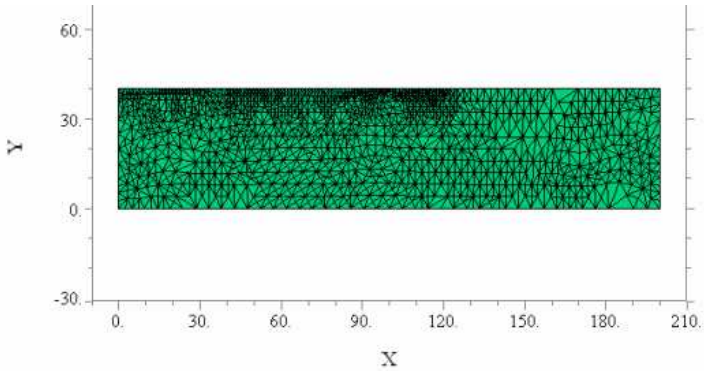
Ad b) Rozwiązanie zagadnienia konsolidacji warstwy pod wpływem obciążenia przekazywanego przez sztywną płytę fundamentową na grunt pod wpływem budowli piętrzącej i filtracji

Zagadnienie odkształceń ośrodka Biota pod wpływem obciążenia było tematem licznych publikacji [Sobczyńskiej, 1966, 1967], [Strzeleckiego, 1973a, 1973b, 1973c, 1974b], [Gaszyńskiego, 1978, 1980, 1998], [Gaszyńskiego i innych, 1975a, 1975b, 1975c, 1976, 1977]. Nie znaleziono w literaturze rozwiązań analitycznych, w których jednocześnie do ośrodka przykładano by obciążenie i narzucono gradient wysokości hydraulicznej.

Rozpatrywane przez nas zagadnienie ma charakter dydaktyczny. W zagadnieniach związanych z procesami rzeczywistymi należałoby ułożyć pewien scenariusz obliczeń, związany z odwzorowaniem procesów naturalnych, zawierający proces osiadań pod wpływem sił ciężkości, proces wzrostu naprężeń wywołany budową konstrukcji budowli piętrzącej i na końcu spiętrzenie wód i wpływ filtracji na proces odkształcenia – naprężenia. Istniejące narzędzia informatyczne w pełni pozwalają na tak zaprogramowany proces analizy zjawisk pełzania ośrodka porowatego.

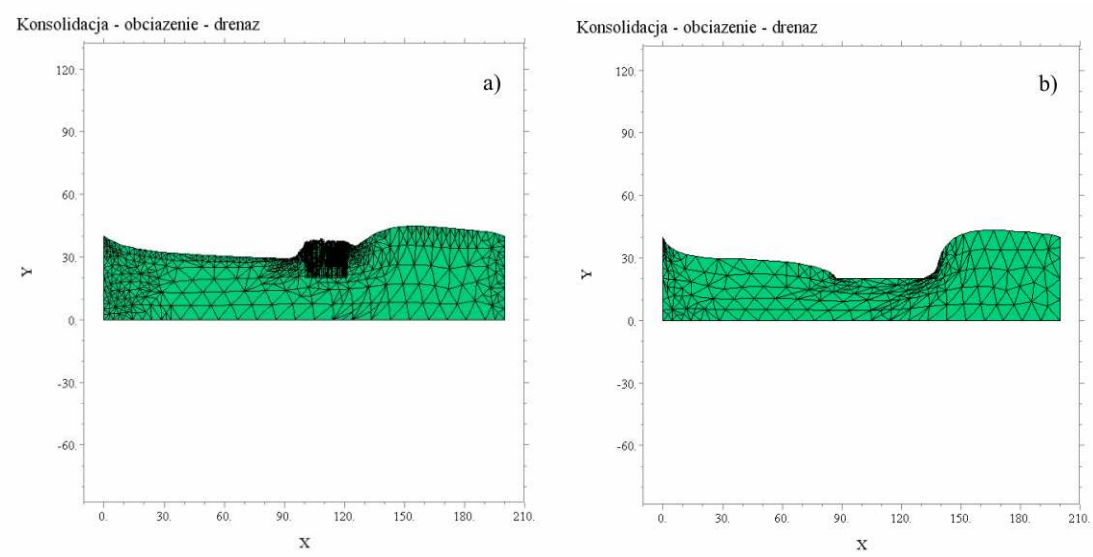
Do obliczeń przyjęto wielkości parametrów ośrodka identyczne jak w poprzednim przykładzie obliczeniowym.

Schemat obliczeniowy oraz siatkę elementów skończonych przedstawiono na Rys. 13.52.



Rys. 13.52. Geometria zagadnienia i siatka elementów skończonych.

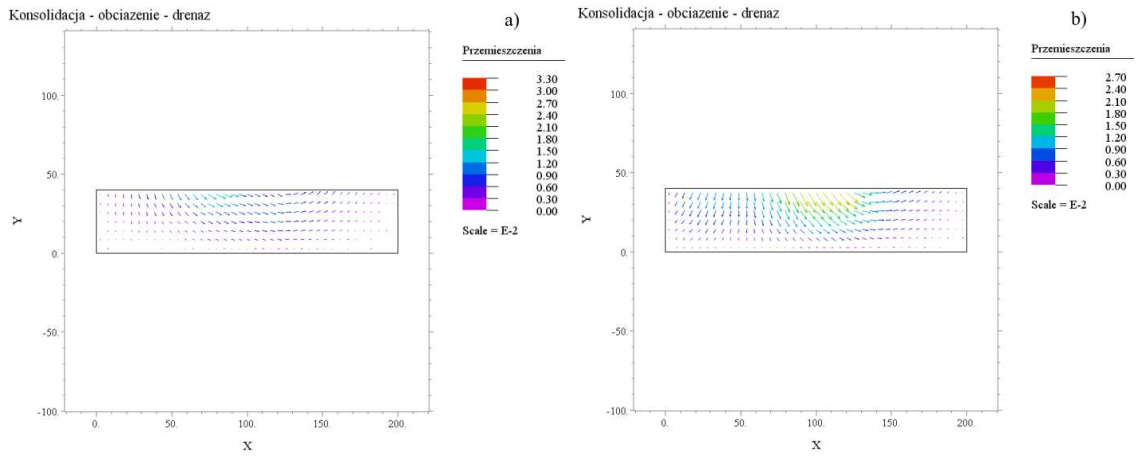
Przemieszczenia węzłów siatki w skali skażonej (składowe przemieszczenia przemnożono przez 1000) przedstawiono na Rys. 13.53, przy czym przemieszczenia siatki w chwili $t = 0,01s$ - Rys.13.53a) można traktować jako przemieszczenia natychmiastowe, natomiast przemieszczenia po czasie $t = 10^{20} s$ (Rys. 13.53b) reprezentują przemieszczenia końcowe po procesie konsolidacji.



Rys. 13.53. Przemieszczenia siatki elementów skończonych w skali skażonej po czasie

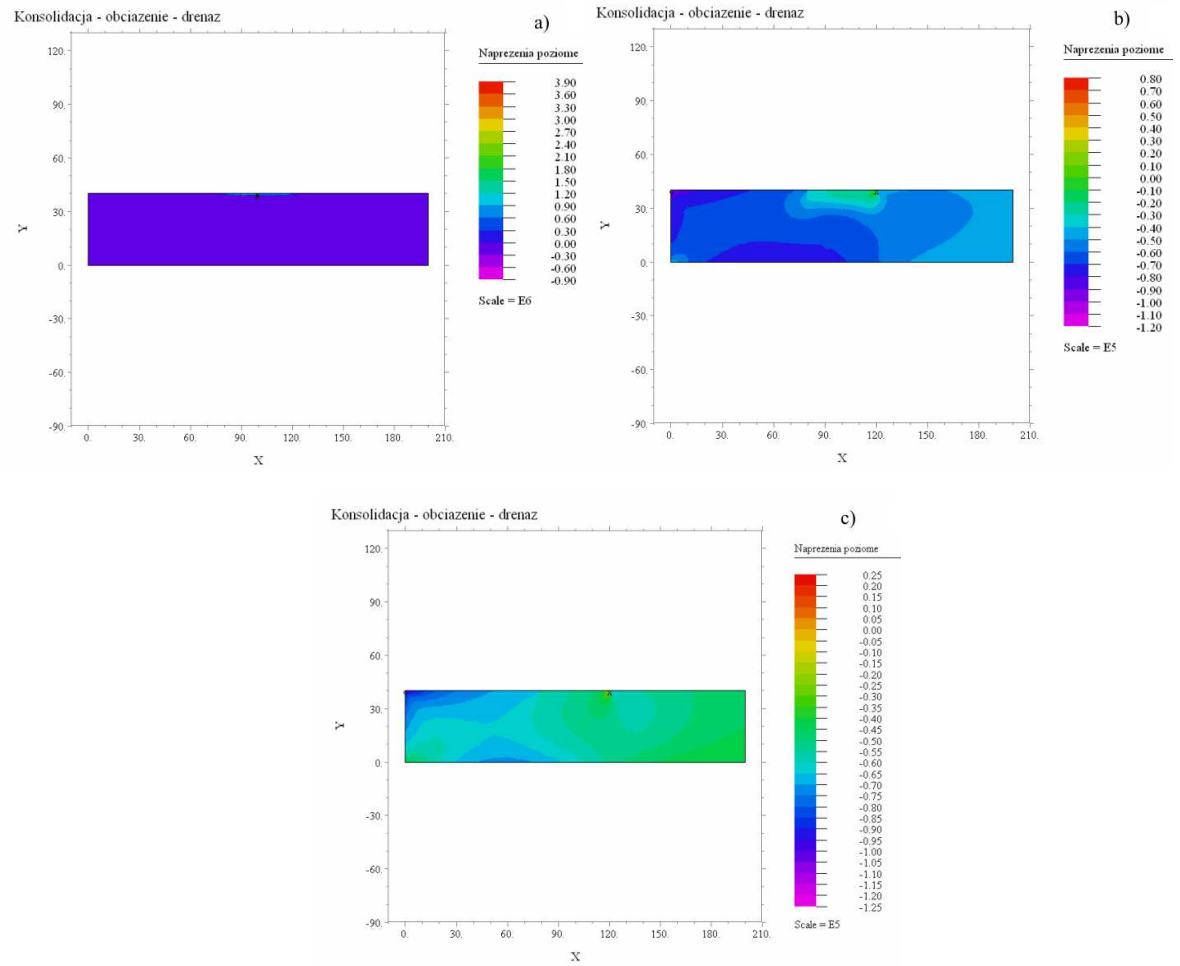
a) $t = 0,01s$ **b)** $t = 10^{20}\,s$ **.**

Wektorowe pole przemieszczeń w dwóch skrajnych momentach czasowych przedstawiono na Rys. 13.54. Jak widać, pole przemieszczeń od początku zachowuje ten sam charakter. Obraz przemieszczeń różni się jedynie co do wartości wektorów przemieszczenia.



Rys. 13.54. Pole wektorowe przemieszczeń a) $t = 0,01s$ **b)** $t = 10^{20}\,s$ **.**

Poniżej przedstawiono pole wartości składowej poziomej naprężeń σ_{xx} dla trzech przedziałów czasowych: Rys. 13.55a) $t = 0{,}1s$, Rys.13.55b) $t = 10000s$, Rys.13.55c) $t = 10^{20}s$.



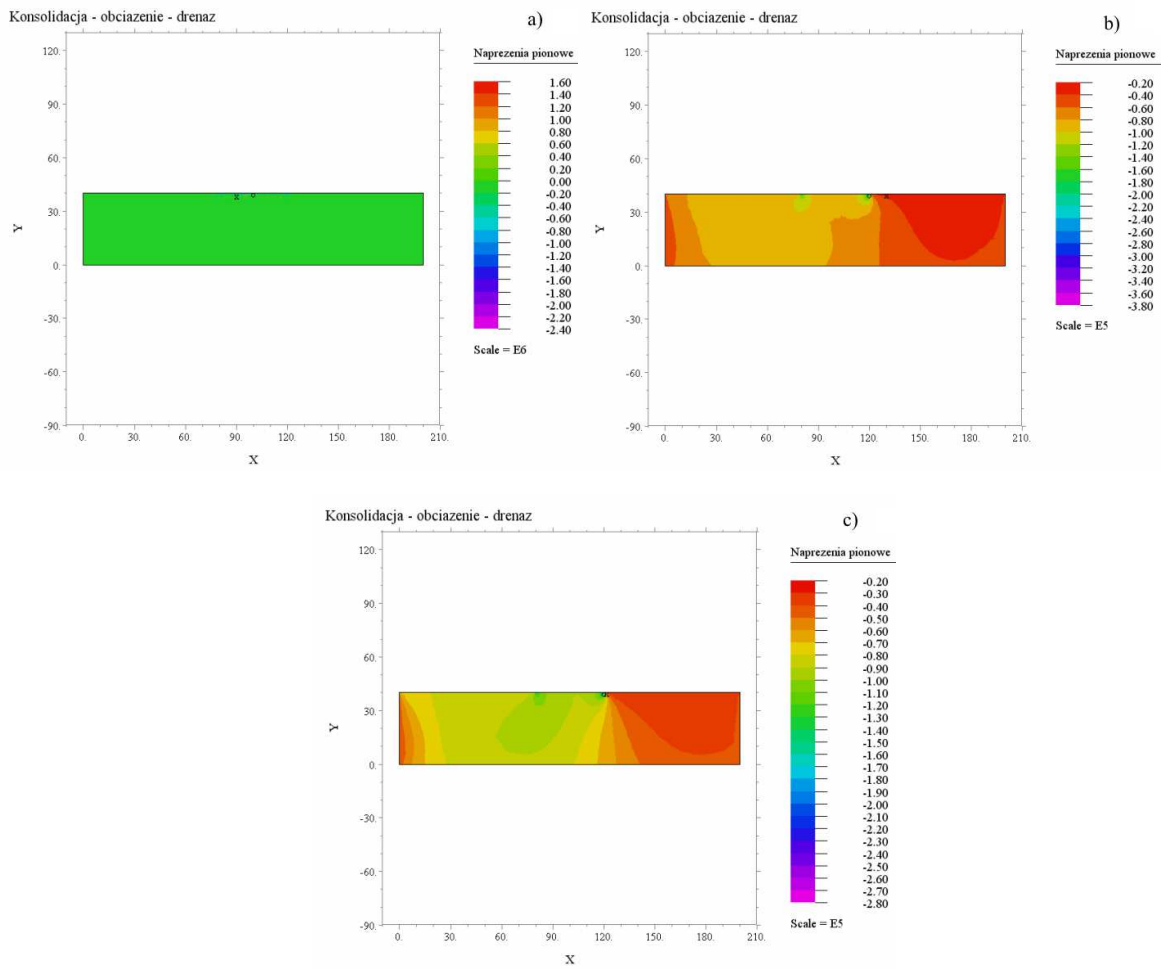
Rys. 13.55. Pole naprężeń σ_{xx} dla a) $t = 0{,}1s$ b) $t = 10000s$ c) $t = 10^{20}s$.

Przedstawione rysunki wskazują na ewolucję naprężeń poziomych w czasie.

Wartości naprężeń mają w całym obszarze znak ujemny (ściskanie). Kształt izolinii naprężeń wskazuje na istotny wpływ na pole naprężęń poziomych rozkładu naprężeń hydrostatycznych i filtracji wody przez ośrodek.

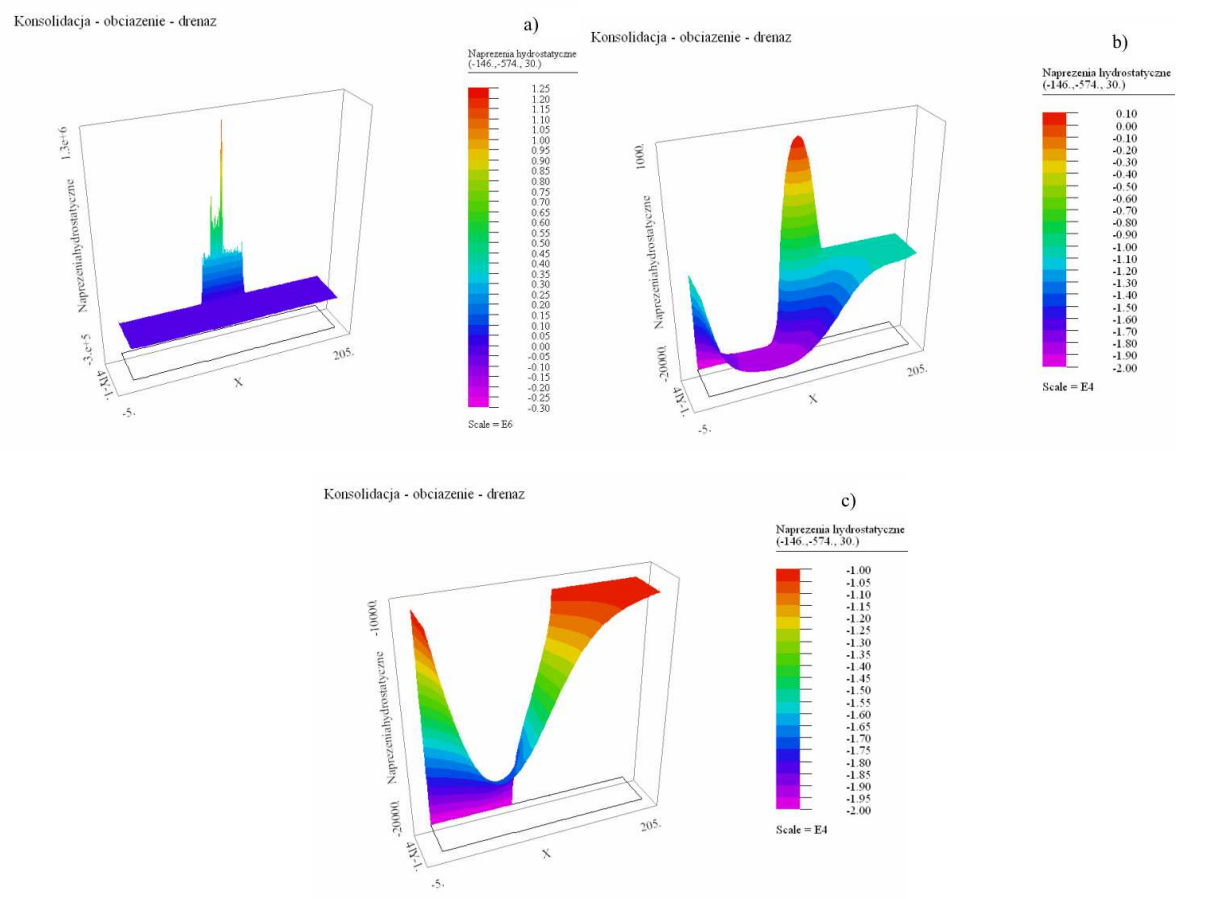
Pole naprężeń pionowych dla trzech czasów przedstawiono na Rys.13.56a dla $t = 0{,}1s$ Rys. 13.56b dla $t = 10000s$, Rys. 13.56c dla $t = 10^{20}s$. Widać na przedstawionych rysunkach, że charakter izolinii naprężeń pionowych σ_{yy} ulega istotnej zmianie w procesie konsolidacji. Znak naprężeń jest jednak w całym obszarze ujemny, co wskazuje na fakt, że mamy do czynienia ze ściskaniem w całym obszarze konsolidacji. Naprężenia po zakończeniu pełzania ośrodka porowatego pokazują, że wielkość naprężeń pionowych jest o rząd wielkości większa pod

budowlą piętrzącą niż po stronie odpowietrznej budowli piętrzącej. Łatwo sprawdzić, że wraz ze wzrostem ciśnienia hydrostatycznego po stronie spiętrzonej wody mamy do czynienia ze spadkiem wielkości tych naprężeń aż do zmiany znaku. Metoda ta może służyć do określania warunku granicznego upłynnienia ośrodka porowatego, czyli określenia strefy przekroczenia stateczności filtracyjnej ośrodka.



Rys. 13.56. Pole naprężeń σ_{yy} dla a) $t = 0{,}1s$ b) $t = 10000s$ c) $t = 10^{20}s$.

Istotną rolę w procesie konsolidacji odgrywa ewolucja w czasie naprężenia hydrostatycznego w czasie. Poniżej przedstawiono proces ewolucji tego naprężenia dla $t = 0{,}1s$ - Rys.13.57a, dla $t = 10000s$ - rys. 13.57b , dla $t = 10^{20}s$ - Rys. 13.57c. Powyższe wykresy 3D pokazują, jak w początkowej fazie procesu pełzania odgrywa przyłożone obciążenie poprzez sztywną płytę fundamentową, a w późniejszym okresie, jaki na kształt funkcji ma wpływ różnica ciśnień po stronie spiętrzenia wody i po stronie odpowietrznej budowli piętrzącej. Końcowy rozkład funkcji naprężenia hydrostatycznego jest charakterystyczny dla przypadku, gdy mamy do czynienia tylko z filtracją wody opływającej budowlę piętrzącą. Wpływ obciążenia ciężarem budowli piętrzącej całkowicie zanika.



Rys. 13.57. Naprężenie hydrostatyczne w 3D dla a) $t = 0{,}1s$ **, b)** $t = 10000s$ **, c)** $t = 10^{20}s$ **.**

Mimo że nie zajmujemy się modelem lepko sprężysto plastycznym ciała Biota obliczyć możemy zachowanie się potencjału plastyczności G, liniowego modelu Coulomba – Mohra, zdefiniowanego wzorem:

$$G = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)\sin\varphi - c\cos\varphi, \tag{13.64}$$

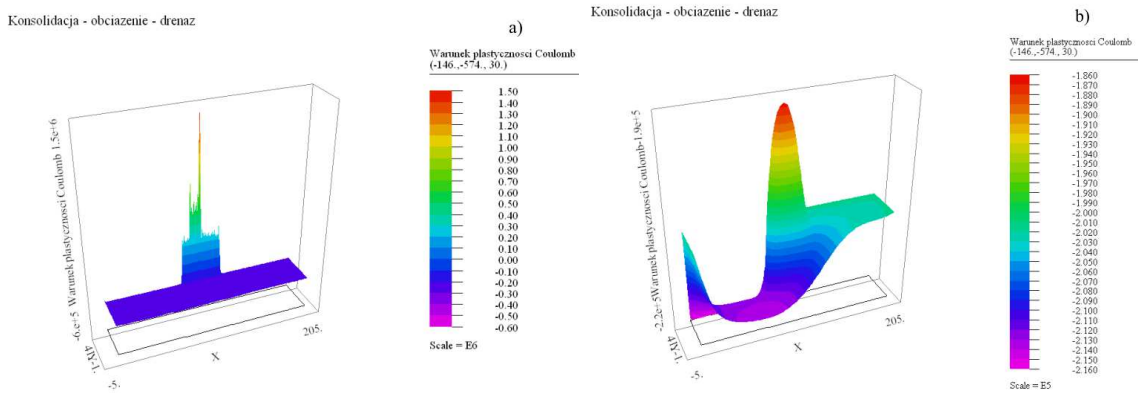
gdzie σ_1 i σ_2, to naprężenia główne wyrażone przy pomocy składowych tensora naprężenia σ_{ij} dla płaskiego stanu odkształcenia wzorami:

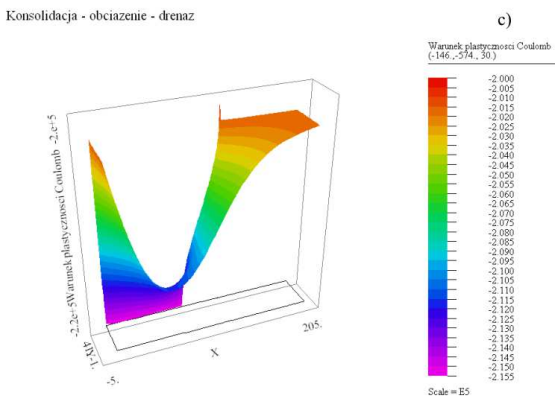
$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)^2 + 4\tau_{xy}{}^2},$$
$$\sigma_2 = \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)^2 + 4\tau_{xy}{}^2}. \qquad (13.65)$$

Na poniższych rysunkach przedstawiono wykresy wielkości potencjału G w obszarze modelu dla $t = 0{,}1s$ - Rys. 13.58a, $t = 10000s$ - Rys. 13.58b, $t = 10^{20}s$ - Rys. 13.58c. Obliczenia wykonano, przyjmując wartości:

- kąta tarcia wewnętrznego $\varphi = 20^0$,
- kohezji $c = 10^4 N/m^2$.

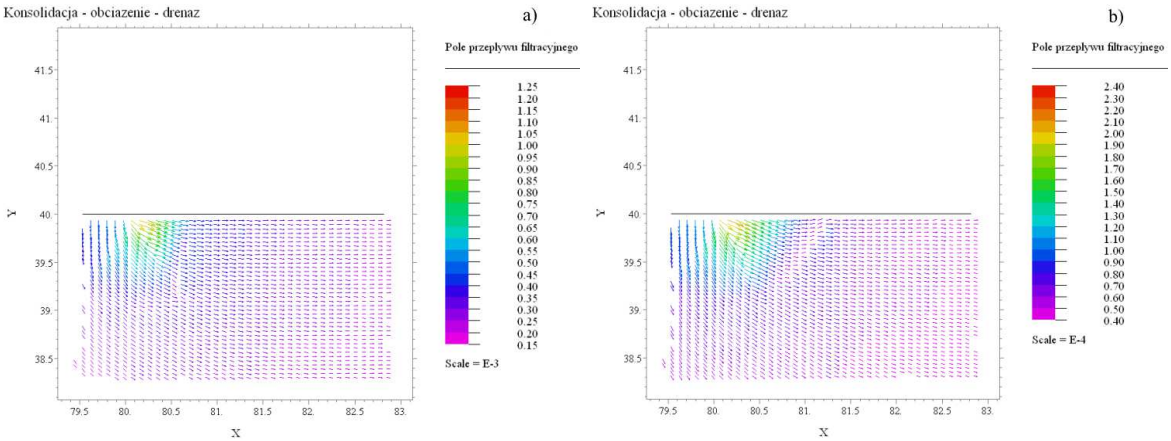
Widać z wykresów, że dla przyjętych wartości kąta tarcia wewnętrznego i kohezji tylko w momencie początkowym wartość potencjału jest dla części obszaru dodatnia lub równa zeru, czyli dla przyjętych parametrów modelu Coulomba mamy do czynienia ze strefą uplastycznienia. Występuje ona pod fundamentem budowli piętrzącej. W dalszym procesie konsolidacji wartość G przyjmuje jednolity znak ujemny, co wskazuje, że strefa plastyczna zanika i znajdujemy się w zakresie modelu lepko – sprężystego.





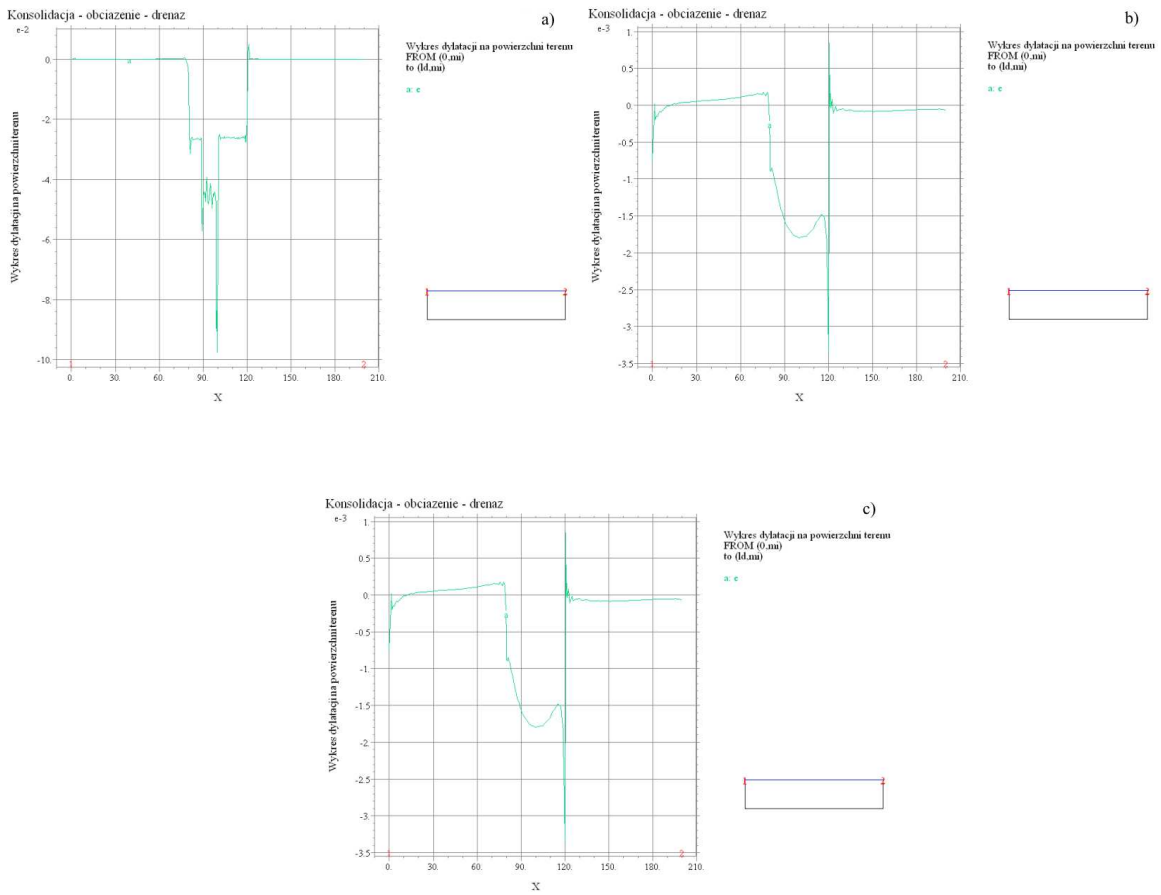
Rys. 13.58. Funkcja potencjału Coulomba-Mohra dla: a) $t = 0{,}1s$ **b)** $t = 10000s$ **c)** $t = 10^{20}s$ **.**

Dla zobrazowania pole wektorowego filtracji obserwowano przepływ filtracyjny w interesujących obszarach . Poniżej przedstawiono pole wektorowe prędkości filtracji w okolicy wpływu wód pod fundament budowli piętrzącej na Rys. 13.59 dla: a) $t = 10000s$ b) $t = 10^{20}s$. Widać, że charakter pola nie ulega zmianie, jedynie wyraźnie ulegają zmianie (o rząd wielkości) wartości wektorów prędkości. Oczywiście w fazie początkowej prędkości wywołane działaniem obciążenia i gradientu ciśnień hydrostatycznych, są większe i ustalają się po upływie znacznego czasu konsolidacji. Wykres zmian dylatacji powierzchni terenu przedstawiony został na rysunkach 13.60a)-13.60c).



Rys. 13.513. Pole wektorowe prędkości w okolicy wpływu pod fundament budowli piętrzącej

a) $t = 10000s$ **b)** $t = 10^{20}s$ **.**



Rys. 13.60. Wykres zmian dylatacji na brzegu dla

a) $t = 0{,}1s$ **b)** $t = 10000s$ **c)** $t = 10^{20}\,s$ **.**